উচ্চমাধ্যমিক গণিত

দ্বিতীয় খণ্ড ত্রিকোণমিতি

শ্রী সত্যেন্দ্র মোহন সেনগুপ্ত
শ্রী অলক নাথ হালদার

Approved Syllabus of the West Bengal Council of Higher Secondary Education, as a text book on Trigonometry for Classes XI & XII, has been strictly followed.

উচ্চ মাধ্যমিক গণিত

দ্বিতীয় খণ্ড ঃ ত্রিকোণমিতি

[একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর জন্য]

শ্রীসত্যেন্দ্র মোহন সেনগুপ্ত, এম-এস্‌ সি.
গণিতের প্রবীণতম অধ্যাপক, টি. ডি. বি. কলেজ, রাণীগঞ্জ, বর্ধমান।

ও

শ্রীঅলক নাথ হালদার, এম এ. বি. টি.
গণিত শিক্ষক, সিহাড়শোল রাজ উচ্চতর বিদ্যালয়, রাণীগঞ্জ, বর্ধমান।

GRANTHA TIRTHA · CALCUTTA

গ্রন্থতীর্থ

ফোন: ৩৪-২৬৫০

প্রকাশক ও পুস্তক বিক্রেতা

৬৫/৩৩, কলেজ স্ট্রীট · কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রকাশক :
এস. বি. নায়ক
৬৫/৩এ, কলেজ ষ্ট্রীট্,
কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রথম মুদ্রণ : আগষ্ট, ১৯৭৬
দ্বিতীয় মুদ্রণ : নভেম্বর, ১৯৭৮

This book has been Printed on paper alloted by Government of India at Concessional rate.

মূল্য : আট টাকা মাত্র।

মুদ্রাকর :
শ্রীদুলালচন্দ্র ভূঞ্যা
সুদীপ প্রিণ্টার্স
৪/১এ, সনাতন শীল লেন
কলিকাতা-৭০০০১২

সূচীপত্র

WEST BENGAL COUNCIL OF H. S. EDUCATION

Syllabus

MATHEMATICS

Full Marks—200

PAPER I (Marks—100)

Algebra, Trigonometry and Analytical Geometry of Two Dimensions

Algebra :— 30 *marks* :

Variation, Arithmetical Progression, Geometrical Progression. Surds, Laws of indices. Complex numbers. Theory of quadratic equation. Permutations and Combinations. Binomial theorem for positive integral index ; Idea of Infinite series—sum of infinite G. P. series. Use of Binomial theorem for fractional and negative indices. Logarithms—Compound interest. Use of logarithmic and exponential series.

Trigonometry :— 30 *marks* :

Measure of an angle—Degrees, Radians. Trigonometrical ratios of compound angles. Multiple and submultiple angles, complementary and supplementary angles. Graphs of trigonometrical functions ; Graphical and general solutions of Trigonometrical equations. Inverse circular functions. Properties of triangles. Solution of triangles.

Analytical Geometry of Two Dimensions :— 40 *marks* :

Rectangular cartesian co-ordinates ; Polar co-ordinates ; Transformation from one system to another. Distance between two points. Division of a segment in a given ratio. Area of triangles. Concept of a locus. Equations of straight

lines ; Angle between two lines—Conditions of perpendicularity and parallelism of two lines. Distance of a point from a given Line. Position of a point with respect to a line. Equations of bisectors of angles between two lines. Equations of circles. Idea of conic sections—Focus—Directrix. Definition of a conic section. Eccentricity and axes of conic sections. Equations of Parabola, Ellipse, and Hyperbola referred to their principal axes.

Equations of tangents and normals to circles and the different conics (use of Calculus may be indicated).

PAPER II (Marks—100)

Elements of Calculus and Mechanics

Elements of Differential Calculus :— 30 *marks* :

Rational Numbers. Real Numbers and their geometrical representation. Functions of a single variable including trigonometrical functions. Limit and continuity (geometrical and intuitive approach). Inverse functions. Standard Limits such as.

$$\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{\sin x}{x},\quad \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{e^x-1}{x},\quad \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{\log(1+x)}{x}$$

(Proofs not required)

Fundamental limit theorems (statement only). Differential co-efficient of a function and its significances. Rules of differentiation of sum, product and quotient of two functions. Rule of differentiation of function of a function (Proof not required). Differential co-efficients of x^n (n rational), $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\log x$ from first principles, Second order derivative of a function.

Integral Calculus and Differential Equations :—

30 *marks* :

Indefinite Integrals. Standard forms,

Integration by simple substitution. Integral by parts in simple cases. Definite Integral as the limit of a sum and as an area. Fundamental theorem connecting primitive with definite integral (Proof not required). **Determination of areas in simple cases.**

Solution of first order differential equations by separation Method.

Elements of Mechanics :— 40 *marks* :

Resultant of any two velocities and of any two accelerations of a particle. Relative Velocity :

Expressions for velocity and acceleration of a particle in cartesian co-ordinates. Newton's laws of motion ; Equation of motion. Motion of a particle in a straight line. Simple Harmonic motion Vertical motion under gravity, Motion of a projectile under constant gravity neglecting air-resistance.

Resultant of two concurrent forces, two like parallel forces, two unlike parallel forces ; Couples. Centre of gravity of a uniform plane lamina :—simple cases.

Resultant of three or more concurrent forces in a plane, conditions of equilibrium.

Integral Calculus and Differential Equations

30

[illegible] forms.

Integration [illegible] simple cases. Definite [illegible] [illegible] with [illegible] Determination of [illegible] in simple cases.

Solution of first order [illegible] equations [illegible] with [illegible]

Elements of Mechanics [illegible] 100

[illegible] of a [illegible] velocity and [illegible] of any two [illegible] particle. Relative velocity.

[illegible] of a particle in [illegible] of motion [illegible] Simple harmonic motion. Vertical [illegible] under gravity [illegible] particle under [illegible]

Resultant of two [illegible] forces [illegible] Centre of gravity of a uniform plane [illegible]

[illegible] of [illegible] conditions of [illegible]

প্রথম অধ্যায়

কোণের পরিমাপ (Measurement of angles)

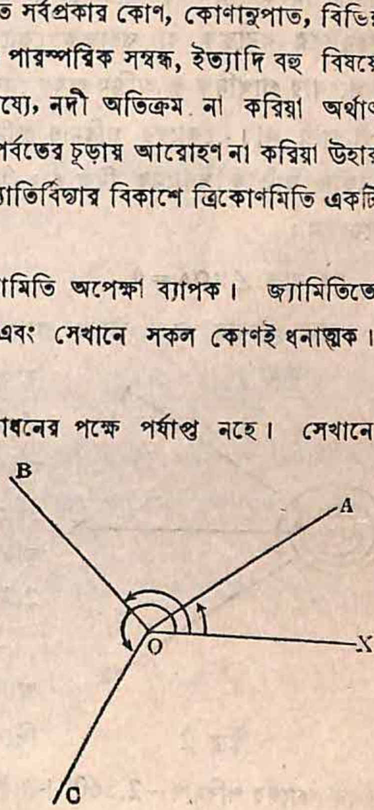
সূচনা : ত্রিকোণমিতি—গণিত শাস্ত্রের একটি বিশিষ্ট শাখা। গ্রীক্ জ্যোতির্বিদ **হিপ্পারকাস্** (Hipparchus) ইহার আবিষ্কারক। পরে আলেকজান্দ্রিয়ার বিখ্যাত জ্যোতির্বিদ **তোলেমি** (Ptolemy) গণিত শাস্ত্রের এই শাখার প্রভূত উন্নতি সাধন করেন।

প্রথম অবস্থায় ত্রিকোণমিতি বলিতে ত্রিভুজের পরিমাণ বুঝাইত। বর্তমান যুগে ইহাকে সাধারণভাবে **কোণের পরিমাপ সম্বন্ধীয় বিজ্ঞান** (Science of angular measurement) বলিয়া গণ্য করা হয়। ইহাতে সর্বপ্রকার কোণ, কোণানুপাত, বিভিন্ন কৌণিক অপেক্ষক (function), উহাদের ধর্ম ও পারস্পরিক সম্বন্ধ, ইত্যাদি বহু বিষয়ে আলোচনা করা হইয়াছে। ত্রিকোণমিতির সাহায্যে, নদী অতিক্রম না করিয়া অর্থাৎ নদীর এক পারে অবস্থান করিয়া উহার প্রস্থ বা পর্বতের চূড়ায় আরোহণ না করিয়া উহার উচ্চতা পরিমাপ করা সম্ভব। পদার্থবিদ্যা ও জ্যোতির্বিদ্যার বিকাশে ত্রিকোণমিতি একটি বিশিষ্ট স্থান অধিকার করিতে সমর্থ হইয়াছে।

1. ত্রিকোণমিতিতে কোণের ধারণা জ্যামিতি অপেক্ষা ব্যাপক। জ্যামিতিতে কোণের পরিমাণ 360° এর মধ্যে সীমাবদ্ধ এবং সেখানে সকল কোণই ধনাত্মক। ঋণাত্মক কোণের ব্যবহার জ্যামিতিতে নাই।

কোণের এই ধারণা ত্রিকোণমিতিক উদ্দেশ্য সাধনের পক্ষে পর্যাপ্ত নহে। সেখানে যে কোন পরিমাণের ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোণের ব্যবহার প্রয়োজনীয়।

তাই ত্রিকোণমিতিতে কোণের সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে এইরূপ :



চিত্র 1

কোন সমতলে একটি সরলরেখা উহার উপরিস্থ কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঘুরিলে কোণের উৎপত্তি হয়। ঘূর্ণায়মান সরলরেখাটিকে কোণের উৎপাদক-রেখা (Generating line) বলে। উহার প্রাথমিক অবস্থানকে (Initial position) বলে প্রাথমিক বাহু

(Initial side) এবং অন্তিম (Final) অবস্থানকে বলে অন্তিম বাহু (Terminal side)। যে বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া উৎপাদক রেখা ঘোরে তাহাকে বলে শীর্ষবিন্দু (Vertex)।

যেমন ঘূর্ণ্যমান রেখা উহার প্রাথমিক অবস্থান OX হইতে ঘুরিয়া OA, OB, OC ইত্যাদি অবস্থানে আসিলে যথাক্রমে XOA, XOB, XOC ইত্যাদি কোণের উৎপত্তি হইবে।

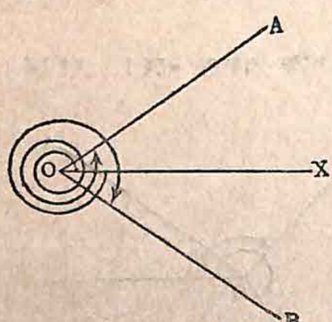
2. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ।

গণিত ও বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার ন্যায় এক্ষেত্রেও ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণ্যনের ফলে ধনাত্মক কোণ এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘূর্ণ্যনের ফলে ঋণাত্মক কোণের উৎপত্তি হয়।

এখন উৎপাদক রেখা শীর্ষবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে বা ঘড়ির কাঁটার দিকে অনির্দিষ্ট পরিমাণে (Indefinitely) ঘুরিতে পারে। ফলে যে কোন পরিমাণের ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোণের উৎপত্তি হইতে পারে। সেইজন্য ঘূর্ণ্যমান সরলরেখার প্রাথমিক ও অন্তিম অবস্থানের দ্বারা কোণের পরিমাণ সুনির্দিষ্ট ভাবে নির্ধারণ করা যায় না। কোণের পরিমাণ সুনির্দিষ্ট ভাবে জানাইবার জন্য প্রাথমিক ও অন্তিম অবস্থান ছাড়াও ঘূর্ণ্যনের দিক ও ঘূর্ণ্যনের পরিমাপ জ্ঞাপক চাপ (Arc) প্রদর্শন করা প্রয়োজন।

ধরা যাক $\angle XOA = \theta$,

যখন ঘূর্ণ্যমান রেখা উহার প্রাথমিক অবস্থান OX হইতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া OA অবস্থানে আসিবে তখন $\angle XOA = \theta$; যখন ঐ একই দিকে পূর্ণ এক পাক ঘুরিবার পর পুনরায় OA অবস্থানে আসিবে তখন কোণের পরিমাণ হইবে $360° + \theta$. পূর্ণ দুই পাক ঘুরিয়া OA তে আসিলে কোণের পরিমাণ হইবে $2.360° + \theta$.



চিত্র 2

আবার ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরিয়া OA অবস্থানে আসিলে কোণের পরিমাণ $-360° + \theta$, ঐ একই দিকে পুনরায় পূর্ণ একপাক ঘুরিয়া OA তে আসে তখন কোণের পরিমাণ $-2.360° + \theta$ ইত্যাদি।

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে একই অন্তিম বাহু OA অসংখ্য ভিন্ন ভিন্ন কোণের সীমাস্থ রেখা (Bounding line) হইতে পারে।

3. কোণ পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতি (Different systems of measurement of angles)।

কোণ পরিমাপের দুইটি পদ্ধতির বিষয়ে এখানে আলোচনা করা হইবে :

(1) **ষষ্টিক পদ্ধতি** (Sexagesimal system) এবং (2) **বৃত্তীয় পদ্ধতি** (Circular system)।

(1) **ষষ্টিক পদ্ধতি :** সমকোণ একটি ধ্রুবক কোণ। এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে 90টি সমান ভাগে ভাগ করিয়া এক এক ভাগকে বলা হয় এক ডিগ্রী **(1°)** এবং ইহাই এই পদ্ধতিতে এককরূপে ব্যবহৃত হয়। এক ডিগ্রীর 60 ভাগের 1 ভাগকে বলা হয় এক মিনিট (1′) এবং এক মিনিটের 60 ভাগের 1 ভাগকে বলা হয় এক সেকেণ্ড (1″)।

অর্থাৎ, 1 সমকোণ $= 90°$,

$1° = 60'$,

$1' = 60''$.

পদ্ধতিটি বহু প্রাচীনকাল হইতে প্রচলিত। আজিও ইহা সর্বাধিক ব্যবহৃত এবং বহুবিধ তালিকা এই পদ্ধতির উপর ভিত্তি করিয়া রচিত।

4. অমূলদ সংখ্যা π :

বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সকল বৃত্তের ক্ষেত্রেই অভিন্ন ; অর্থাৎ অনুপাতের মান বৃত্তের আয়তনের (Size) উপর নির্ভর করে না। $\frac{\text{যে কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{উহার ব্যাস}}$ এই অনুপাতটিকে π (**Pi**—পাই) এই গ্রীক অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়। π একটি অমেয় সংখ্যা। ইহাকে দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায় না ; আবার ইহা একটি করণীও (Surd) নহে।

π এর স্থূলমান $\frac{22}{7}$ এবং অধিকতর শুদ্ধমান 3·14159 (পাঁচ দশমিক পর্যন্ত)।

কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হইলে, $\frac{\text{পরিধি}}{2r} = \pi$,

$\therefore$ পরিধি $= 2\pi r$.

5. বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System).

একটি প্রতিজ্ঞা : কোন বৃত্তের কেন্দ্রে ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহার পরিমাণ ধ্রুবক (The angle subtended at the centre

of a circle by an arc equal in length to the radius of the circle is constant) অর্থাৎ ঐরূপ কোণের পরিমাণ সকল বৃত্তের ক্ষেত্রেই অভিন্ন।

মনে কর, কোন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r. মনে কর, চাপ $AB = r$, AOC বৃত্তের ব্যাস।

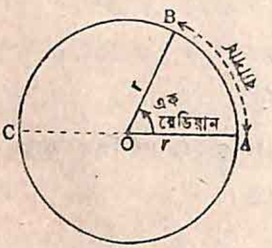
আমরা জানি, কোন বৃত্তের চাপ সমূহের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত ঐ চাপসমূহের অনুপাতের সমান।

$$\therefore \frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } ABC}, \quad \text{or,} \quad \frac{\angle AOB}{180^\circ} = \frac{r}{\text{অর্ধ পরিধি}},$$

$$\text{or,} \quad \frac{\angle AOB}{180^\circ} = \frac{r}{\pi r} = \frac{1}{\pi}. \quad \therefore \quad \angle AOB = \frac{180^\circ}{\pi} = \text{ধ্রুবক} \quad \ldots \quad \ldots (1)$$

$\angle AOB$ কে বলা হয় এক রেডিয়ান (Radian)। অর্থাৎ,

কোন বৃত্তের কেন্দ্রে উহার ব্যাসার্ধের সমান চাপ যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে এক রেডিয়ান বলে।



চিত্র 3

উপরের প্রতিজ্ঞা হইতে দেখা যাইতেছে যে এক রেডিয়ান পরিমাণ কোণ ধ্রুবক কোণ; সুতরাং রেডিয়ানকে কোণ পরিমাপের এককরূপে গ্রহণ করা যায়। বৃত্তীয় পদ্ধতিতে রেডিয়ানকেই এককরূপে ধরা হয়।

$\therefore$ (1) হইতে দেখা যায়, এক রেডিয়ান $= \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{2}{\pi} \times 90^\circ = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ।

এক রেডিয়ানের প্রতীক চিহ্ন 1^c ; 2^c বলিতে 2 রেডিয়ান, π^c বলিতে π রেডিয়ান কোণ বুঝাইবে।

6. ষষ্টিক পদ্ধতি ও বৃত্তীয় পদ্ধতির পারস্পরিক সম্পর্ক।

পূর্বেই দেখিয়াছি, $1^c = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{\cdot}14159}$

$= 57^\circ \, 17' \, 44{\cdot}8''$ (প্রায়)।

আবার, $\because 1^c = \frac{180^\circ}{\pi} \quad \therefore \quad \pi^c = 180^\circ, \text{ or, } 1^\circ = \frac{\pi^c}{180}$

$= \frac{3{\cdot}14159}{180}$ রেডিয়ান $= {\cdot}0174533$ রেডিয়ান (প্রায়)

নিম্নের সম্পর্কগুলি বহুল ব্যবহারের জন্য প্রয়োজনীয়ঃ

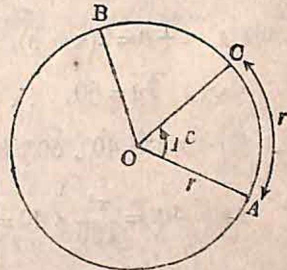
$\pi^c = 180°, \frac{\pi^c}{2} = 90°, \frac{\pi^c}{3} = 60°, \frac{\pi^c}{4} = 45°, \frac{\pi^c}{6} = 30°.$

টীকাঃ বৃত্তীয় পরিমাপ পদ্ধতি বহুল প্রচলিত এবং সাধারণতঃ রেডিয়ান কথাটি বা উহার প্রতীক চিহ্ন (^{c}) বর্জন করিয়াই এই পদ্ধতিতে কোণের পরিমাণ প্রকাশ করা হয়। যেমন, $\frac{\pi^c}{4}$ কে কেবলমাত্র $\frac{\pi}{4}$ রূপে লেখা হয়। যখন কোন এককের উল্লেখ করা হয় না তখন রেডিয়ান পরিমাপ বুঝিতে হইবে।

বৃত্তীয় পরিমাপের ক্ষেত্রে π এই প্রতীকের দ্বারা π^c অর্থাৎ, 180° পরিমাণ কোণ বুঝিতে হইবে ; 3·14159……এই বিশুদ্ধ সংখ্যাটি নহে।

$\frac{\pi}{4} = 45$ এইরূপ লেখা ভুল। লিখিতে হইবে $\frac{\pi}{4} = 45°$.

7. কোন বৃত্তে চাপ, ঐ চাপ সম্মুখস্থ কেন্দ্রীয় কোণ ও ব্যাসার্ধের পারস্পরিক সম্পর্ক।



চিত্র 4

মনে কর O কেন্দ্রিক বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং চাপ AB এর দৈর্ঘ্য s এবং উহা কেন্দ্রে ∠AOB কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। মনে কর $\angle AOB = \theta^c$.

ধরা যাক, চাপ $AC = r$,

$\therefore \angle AOC = 1^c$,

এখন যেহেতু কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত উহাদের সম্মুখস্থ চাপগুলির অনুপাতের সমান ;

$$\therefore \frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AC}, \text{ or, } \frac{\theta}{1} = \frac{s}{r}, \therefore \theta = \frac{s}{r}, \text{ or, } s = r\theta.$$

অতএব **বৃত্তীয় পরিমাপে**, কোণের পরিমাণ $= \frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$,

বা, চাপ = কোণের পরিমাণ × ব্যাসার্ধ।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. $22\frac{1}{2}°$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

$\because 180° = \pi^c$

$\therefore 1° = \frac{\pi^c}{180}$

$\therefore 22\frac{1}{2}° = \frac{45}{2}° = \frac{\pi^c}{180} \times \frac{45}{2} = \frac{\pi^c}{8}.$

উদা. 2. $\frac{5\pi}{12}$ রেডিয়ানকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

$\because \quad 1^c = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad \therefore \quad \frac{5\pi^c}{12} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{5\pi}{12} = 75^\circ.$

উদা. 3. 1·309 রেডিয়ানকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। [$\pi = 3{\cdot}1416$]

[C. U. '48]

$$1{\cdot}309^c = \frac{180^\circ}{3{\cdot}1416} \times 1{\cdot}309 = \frac{180^\circ}{2{\cdot}4} = 75^\circ.$$

উদা. 4. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগতি গঠন করে এবং বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ। কোণগুলি বৃত্তীয় মানে প্রকাশ কর। [C. U. '51]

মনে কর, কোণগুলি $\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta$ ডিগ্রী।

$\therefore \quad \alpha - \beta + \alpha + \alpha + \beta = 180, \quad \therefore \quad \alpha = 60.$

আবার, $\alpha + \beta = 2(\alpha - \beta)$, or, $60 + \beta = 2(60 - \beta)$,

or, $3\beta = 60, \quad \therefore \quad \beta = 20,$

$\therefore$ কোণগুলি 40°, 60°, 80°.

এখন $40^\circ = \frac{\pi^c}{180} \times 40 = \frac{2\pi^c}{9}$;

$60^\circ = \frac{\pi^c}{180} \times 60 = \frac{\pi^c}{3}$;

$80^\circ = \frac{\pi^c}{180} \times 80 = \frac{4\pi^c}{9}$;

$\therefore$ বৃত্তীয় মানে কোণগুলি $\frac{2\pi}{9}, \ \frac{\pi}{3}, \ \frac{4\pi}{9}$.

উদা. 5. পৃথিবীকে 7920 মাইল ব্যাসের গোলক ধরিলে, উহার কেন্দ্রে ভূ-পৃষ্ঠের যে চাপের সম্মুখকোণ একমিনিট তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [$\pi = \frac{22}{7}$] [C. U. '48]

কেন্দ্রস্থ কোণ $= 1' = \frac{1^\circ}{60} = \frac{\pi^c}{180} \times \frac{1}{60}$.

$\because \quad s = r\theta, \quad \therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= \frac{7920}{2} \times \frac{22}{7 \times 180} \times \frac{1}{60}$

$= \frac{121}{105} = 1\frac{16}{105}$ মাইল।

প্রশ্নমালা 1

1. ষষ্টিক মানে প্রকাশ কর :

(i) $\frac{\pi^c}{8}$; (ii) $\frac{2\pi^c}{3}$; (iii) $\frac{\pi^c}{12}$; (iv) $\frac{7\pi^c}{5}$.

2. বৃত্তীয় মানে প্রকাশ কর :

(i) 45°, (ii) 30°, (iii) 135°, (iv) 225°, (v) 330°, (vi) 0°.

3. $\frac{1}{\pi} = \cdot 31831$ ধরিয়া দেখাও যে, $1^c = 206265$ সেকেণ্ড (প্রায়)।

[G. U. '48]

4. কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 2 : 5 : 3 ; উহার বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয়মান নির্ণয় কর। [C. U. '42]

5. কোন সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটির অন্তর $\frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান ; ত্রিভুজটির কোণগুলিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

6. কোন চতুর্ভুজের চারিটি কোণ সমান্তর প্রগতিতে আছে এবং বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ। ক্ষুদ্রতম কোণের বৃত্তীয় মান কত ? [B. U. 1897]

7. কোন সুষম n-ভুজের একটি অন্তঃকোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

[C. U.]

8. কোন পঞ্চভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে এবং বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের তিনগুণ। কোণগুলি ডিগ্রীতে এবং রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

[B. U.]

9. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে এবং ক্ষুদ্রতম কোণটির ডিগ্রী-সংখ্যা ও বৃহত্তম কোণটির রেডিয়ান-সংখ্যার অনুপাত 60 : π. কোণগুলি ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। [H. S. '60]

10. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের বৃত্তীয় মান $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$; তৃতীয় কোণটির মান ডিগ্রী ও মিনিটে প্রকাশ কর। $\left[\frac{22^c}{7} = 2 \text{ সমকোণ}\right]$ [H. S. '62]

11. 2618 ফুট দীর্ঘ একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [$\pi = 3\cdot 1416$] [C. U.]

12. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 48 ফুট এবং উহার একটি চাপের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণ $66°15'$ হইলে ঐ চাপের দৈর্ঘ্য কত? [প্রদত্ত আছে, পরিধি : ব্যাস = 333 : 106] [C. U.]

13. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সেমি., উহার 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের একটি চাপ কেন্দ্রে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করিবে তাহার মান ডিগ্রী ও মিনিটে প্রকাশ কর। [$\pi = \frac{22}{7}$] [H. S. '61]

14. যদি দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রে দুইটি সমান দৈর্ঘ্যের চাপ যথাক্রমে 60° ও 75° সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তবে ঐ বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় কর। [S. F. '53]

15. এক ব্যক্তি কোন বৃত্তাকার পথে ঘন্টায় 10 মাইল বেগে দৌড়াইয়া 36 সেকেণ্ডে যে চাপ অতিক্রম করে তাহা কেন্দ্রে 56° সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তটির ব্যাস নির্ণয় কর। [$\pi = \frac{22}{7}$] [C. U. '46]

16. একটি ঘোড়া 27 ফুট ব্যাসার্ধের কোন বৃত্তাকার পথে দৌড়াইয়া 3 সেকেণ্ডে যে চাপ অতিক্রম করে তাহা কেন্দ্রে 70° কোণ ধারণ করে। ঘোড়াটি $\frac{1}{2}$ মিনিটে কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে? [$\pi = \frac{22}{7}$] [C. U. '51]

17. 6 ইঞ্চি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার তার কাটিয়া ফেলা হইল এবং উহাকে এমনভাবে বাঁকান হইল যেন উহাকে 8 ফুট ব্যাসার্ধের একটি বলয়ের চাপ বরাবর স্থাপন করা যায়। তারটি বলয়টির কেন্দ্রে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করিবে তাহার পরিমাণ রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

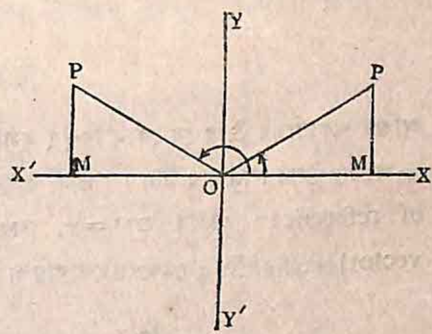
দ্বিতীয় অধ্যায়

কোণানুপাত (Trigonometrical Ratios)

8. কতিপয় শব্দার্থ।

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ; O মূলবিন্দু (origin)।

একটি কোণ **আদর্শ অবস্থানে** (Standard position) আছে বলা হইবে যদি উহার শীর্ষবিন্দু, মূলবিন্দুতে থাকে এবং প্রাথমিক বাহু OX বরাবর থাকে (Coincident with OX), অর্থাৎ x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত মিলিয়া যায়।



চিত্র 5

অন্তিম বাহুর উপর P কোন বিন্দু হইলে এবং P হইতে x-অক্ষের উপর লম্ব PM টানিলে সমকোণী ত্রিভুজ OPM কে বলা হইবে ∠XOP এর triangle of reference.

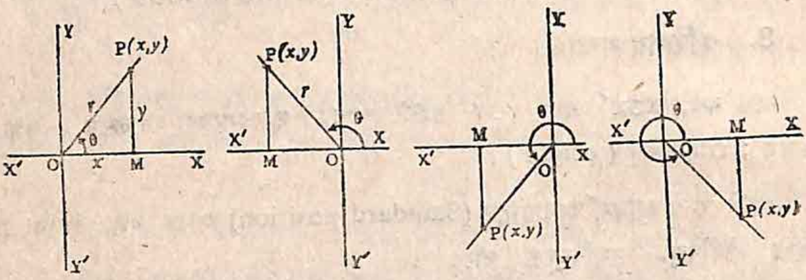
একটি কোণকে আদর্শ অবস্থানে স্থাপন করিলে উহার অন্তিম বাহু যে পাদে (Quadrant) পড়ে তাহার দ্বারাই নির্ধারিত হয় কোণটি কোন পাদে অবস্থিত।

যদি কোন কোণের অন্তিম বাহু অক্ষদ্বয়ের যে কোনটির উপর সমাপতিত হয় তাহা হইলে সেই কোণকে Quadrantal angle বলে। এক্ষেত্রে Triangle of reference সরলরেখায় পরিণত হয়। যেমন 90°, 180°, 270°, 360°…অর্থাৎ 90° যে কোনও গুণিতক কোণ Quadrantal angle.

যে সকল কোণের প্রাথমিক ও অন্তিম বাহু মিলিয়া যায় (coincide) সেই কোণগুলিকে Co-terminal angles বলে। যেমন θ এবং $360°+\theta$ কোণ দুইটি Co-terminal.

9·1. ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometrical Ratios) ।

মনে কর θ যে কোন পরিমাণের ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোণ এবং কোণটিকে আদর্শ অবস্থানে স্থাপন করা হইয়াছে। ঘূর্ণ্যমান রেখার (উৎপাদক রেখা বা Radius vector)



চিত্র 6

অন্তিম অবস্থানের উপর যে কোন বিন্দু (মূলবিন্দু ছাড়া) P (x, y) লও এবং P হইতে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টান। তাহা হইলে সমকোণী ত্রিভুজ OPM হইবে triangle of reference। এখন OM $= x$, PM $= y$ এবং মনে কর, OP $= r$ (radius vector) তাহা হইলে θ কোণের কোণানুপাতগুলির সংজ্ঞা হইতেছে :

sine $\theta = \dfrac{\text{কোটি}}{\text{রেডিয়াস ভেক্টর}} = \dfrac{y}{r}$.	sine	সংক্ষেপে sin
cosine $\theta = \dfrac{\text{ভূজ}}{\text{রেডিয়াস ভেক্টর}} = \dfrac{x}{r}$.	cosine	,, cos
tangent $\theta = \dfrac{\text{কোটি}}{\text{ভূজ}} = \dfrac{y}{x}$.	tangent	,, tan
cotangent $\theta = \dfrac{\text{ভূজ}}{\text{কোটি}} = \dfrac{x}{y}$.	cotangent	,, cot
secant $\theta = \dfrac{\text{রেডিয়াস ভেক্টর}}{\text{ভূজ}} = \dfrac{r}{x}$.	secant	,, sec
cosecant $\theta = \dfrac{\text{রেডিয়াস ভেক্টর}}{\text{কোটি}} = \dfrac{r}{y}$.	cosecant	,, cosec

টীকা : রেডিয়াস ভেক্টর r কে সতত ধনাত্মক ধরা হয়। কিন্তু পাদ অনুসারে ভূজ ও কোটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

উদা. মনে করা যাক, কোন কোণ θ এর অন্তিম বাহুর উপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(5, -12)$, তাহা হইলে রেডিয়াস ভেক্টর $r = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13.$

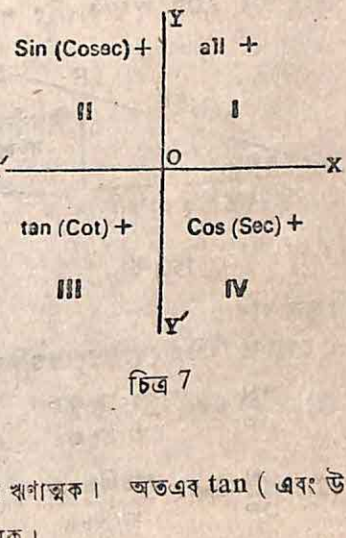
[$\because$ r কে সতত ধনাত্মক ধরা হয়]

$\therefore$ সংজ্ঞা অনুযায়ী, $\sin\theta = \frac{-12}{13}$, $\cos\theta = \frac{5}{13}$,

$\tan\theta = \frac{-12}{5}$, $\cot\theta = \frac{-5}{12}$, $\sec\theta = \frac{13}{5}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{-18}{12}$.

92. ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের চিহ্ন (Signs of Trigonometric Function).

r সর্বদাই ধনাত্মক বলিয়া কোন কোণ θ এর কোণানুপাতগুলির চিহ্ন নির্ভর করিবে ঐ কোণের অন্তিম বাহুর উপর অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্কের উপর ; অর্থাৎ অন্তিমবাহু যে পাদে অবস্থিত তাহার উপর।



চিত্র 7

এখন θ যদি প্রথম পাদে অবস্থিত হয় তবে ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক বলিয়া সকল কোণানুপাতের চিহ্ন ধনাত্মক হইবে।

θ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত হইলে ভুজ ঋণাত্মক এবং কোটি ধনাত্মক। অতএব sin (এবং অবশ্যই cosec) ধনাত্মক ও অপরগুলি ঋণাত্মক হইবে।

θ তৃতীয় পাদে হইলে ভুজ ও কোটি উভয়ই ঋণাত্মক। অতএব tan (এবং উহার অন্যোন্যক cot) ধনাত্মক এবং বাকীগুলি ঋণাত্মক।

θ চতুর্থ পাদে হইলে ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক। অতএব cos (এবং উহার অন্যোন্যক sec) ধনাত্মক এবং বাকীগুলি ঋণাত্মক হইবে।

উপরে উল্লেখিত ফলগুলিকে সংক্ষেপে all, sin, tan, cos রূপে মনে রাখা সুবিধাজনক।

টীকা ঃ দেখা যাইতেছে যে প্রতিটি অনুপাত দুইটি পাদে ধনাত্মক এবং অপর দুইটি পাদে ঋণাত্মক।

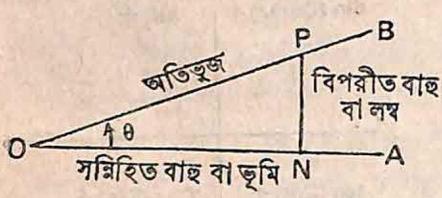
উদা. যদি $\sin\theta$ ঋণাত্মক এবং $\cos\theta$ ধনাত্মক হয় তবে θ কোন্ পাদে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

$\because \sin\theta = -$ $\therefore \theta$, III বা, IV পাদে অবস্থিত।
এবং $\cos\theta = +$ $\therefore \theta$, I বা, IV " " ।
$\therefore \theta$, IV পাদে অবস্থিত।

10·1. সূক্ষ্মকোণের কোণানুপাত (Trigonometric Ratios of acute angle) :

কোন ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণকে আদর্শ অবস্থানে স্থাপিত করিলে উহা সর্বদাই প্রথম পাদে অবস্থিত হইবে। সুতরাং এক্ষেত্রে কোণানুপাতগুলির সংজ্ঞা একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির সাপেক্ষে দেওয়া যায়। এক্ষেত্রে অক্ষদ্বয়ের উল্লেখের প্রয়োজন নাই। এই সংজ্ঞাকে সাধারণ সংজ্ঞার বিশেষ ক্ষেত্র বলিয়া গণ্য করা যাইতে পারে।

মনে কর AOB সূক্ষ্মকোণটির পরিমাণ θ°। OB বাহুর যে কোন বিন্দু P হইতে OA-র উপর PN লম্ব টান। তাহা হইলে PON সমকোণী ত্রিভুজটি উৎপন্ন হইল। এই সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ θ-র সম্পর্কে PN কে **বিপরীত বাহু** বা **লম্ব**, ON কে **সন্নিহিত বাহু** বা **ভূমি** এবং OP কে **অতিভুজ** বলে।



চিত্র 8

θ কোণের বিভিন্ন কোণানুপাতগুলির সংজ্ঞা নিম্নে দেওয়া হইল :—

(1) $\frac{PN}{OP}$ অর্থাৎ $\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$ বা, $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ কে θ কোণের Sine বলে।

(2) $\frac{ON}{OP}$ অর্থাৎ $\frac{\text{সন্নিহিতবাহু}}{\text{অতিভুজ}}$ বা, $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$ কে θ কোণের Cosine বলে।

(3) $\frac{PN}{ON}$ অর্থাৎ $\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$ বা, $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ কে θ কোণের Tangent বলে।

(4) $\frac{ON}{PN}$ অর্থাৎ $\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}}$ বা, $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$ কে θ কোণের Cotangent বলে।

(5) $\frac{OP}{ON}$ অর্থাৎ $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$ বা, $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$ কে θ কোণের Secant বলে।

(6) $\frac{OP}{PN}$ অর্থাৎ $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}}$ বা, $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$ কে θ কোণের Cosecant বলে।

উল্লিখিত অনুপাতগুলি ছাড়া আরও দুটি কোণানুপাত আছে। $1-\cos\theta$ কে ভার্স θ (vers θ) এবং $1-\sin\theta$ কে কোভার্স θ (covers θ) বলে। তবে এই দুইটি কোণানুপাতের ব্যবহার নাই বলিলেই চলে।

10·2. (i) **কোণানুপাতগুলির অন্যোন্যক সম্পর্ক** (Reciprocal Relations)—দুইটি সংখ্যা x এবং y এর গুণফল 1 হইলে x কে y এর এবং y কে x এর অন্যোন্যক বলে। অর্থাৎ $xy=1$ হইলে, x এবং y এর যে কোনটি অপরটির অন্যোন্যক এবং $x=\frac{1}{y},\ y=\frac{1}{x}$.

আমরা জানি $\sin\theta=\frac{y}{r}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta=\frac{r}{y}$

$$\therefore\ \sin\theta\times\operatorname{cosec}\theta=\frac{y}{r}\times\frac{r}{y}=1$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta},\ \text{আবার, } \operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

অনুরূপে, $\cos\theta\times\sec\theta=1,\ \therefore\ \cos\theta=\frac{1}{\sec\theta},\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$

$$\tan\theta\times\cot\theta=1,\ \therefore\ \tan\theta=\frac{1}{\cot\theta},\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

(ii) **ভাগফল সম্পর্ক** (Quotient Relations).

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{y}{r}\div\frac{x}{r}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

অনুরূপে, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

টীকা : (i) পূর্বেই উল্লেখ করা হইয়াছে যে $\sin\theta$, $\cos\theta$, প্রভৃতি এক একটি শুদ্ধ সংখ্যা। **$\sin\theta=\sin\times\theta$ নয়।**

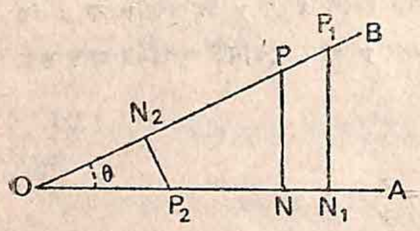
(ii) কোণানুপাতগুলি সংখ্যা বলিয়া যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ, এই মৌল প্রক্রিয়াগুলি বীজগণিতীয় নিয়মে ইহাদের উপর প্রয়োগ করা যাইবে।

(iii) $\sin\theta\times\sin\theta=(\sin\theta)^2$ কে $\sin^2\theta$ রূপে লেখা হইবে, **$\sin\theta^2$ রূপে নয়।** $\sin\theta^2$ লিখিলে θ^2 কোণের sine বুঝিতে হইবে।

(iv) $2\sin\theta$ বলিলে $2\times\sin\theta$ বা, $\sin\theta\times2$ বুঝিতে হইবে। $\sin2\theta$ বলিলে 2θ পরিমাণ কোণের sine বুঝিতে হইবে। $\therefore$ **$2\sin\theta$, $\sin2\theta$-র সহিত সমান নয়।**

10·3. প্রমাণ করিতে হইবে যে, একই কোণানুপাতগুলি সর্বদাই সমান।

মনে কর, $\angle$AOB-এর OB বাহুর উপর P একটি বিন্দু এবং PN, OA বাহুর উপর লম্ব।



চিত্র 9

$\angle$AOB-এর OB বাহুর অপর যে কোন বিন্দু P_1 হইতে OA বাহুর উপর P_1N_1 লম্ব টান।

এখন ΔPON ও ΔP_1ON_1 এই ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle$O সাধারণ, $\angle N = \angle N_1$ [সমকোণ বলিয়া]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle P = \angle P_1$, $\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{PN}{OP} = \frac{P_1N_1}{OP_1} = \sin\theta$, $\frac{ON}{OP} = \frac{ON_1}{OP_1} = \cos\theta$, ···ইত্যাদি।

অতএব, প্রমাণিত হইল যে, OB-এর উপর P বিন্দুর যে কোন অবস্থিতিতে O কোণের কোণানুপাতগুলি সমান হইবে।

এইরূপে যদি OA রেখার উপরিস্থিত কোন বিন্দু P_2 হইতে OB এর উপর P_2N_2 লম্ব টানা যায়, তাহা হইলে ΔOP_2N_2 হইতে O কোণের যে কোণানুপাতগুলি পাওয়া যায় সেগুলিও পূর্ব কোণানুপাতগুলির সমান। কারণ, ΔPON এবং ΔP_2ON_2 সদৃশকোণী বলিয়া উহাদের বাহুগুলিও সমানুপাতী।

টীকা ঃ কোণানুপাতগুলি **কেবলমাত্র** কোণের পরিমাণের উপর নির্ভর করে বলিয়া ঐগুলিকে **ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক** (trigonometric functions) বলে।

10·4. কোণানুপাত সম্বন্ধীয় কয়েকটি মূলসূত্র (Pythagorean সম্পর্ক হইতে) ঃ

অনুচ্ছেদ 9·1 এর চিত্র 6 হইতে,

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

(i) (1) চিহ্নিত সম্পর্কটির উভয়পক্ষকে r^2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \mathbf{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1} \qquad \left[\because \frac{y}{r} = \sin\theta,\ \frac{x}{r} = \cos\theta \right]$$

(ii) (1) এর উভয়পক্ষকে x^2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{r}{x}\right)^2$$

or, $\mathbf{1+\tan^2\theta=\sec^2\theta}$ $\left[\because \frac{y}{x}=\tan\theta, \frac{r}{x}=\sec\theta\right]$

(iii) (1) এর উভয়পক্ষকে y^2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+1=\left(\frac{r}{y}\right)^2$$

or, $\mathbf{1+\cot^2\theta=cosec^2\theta}$ $\left[\because \frac{x}{y}=\cot\theta, \frac{r}{y}=\text{cosec}\,\theta\right]$

টীকা ঃ উপরের তিনটি মূলসূত্রের প্রত্যেকটি হইতে আরও কয়েকটি সূত্র পাওয়া যায়—

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ হইতে $\mathbf{\sin^2\theta=1-\cos^2\theta}$, $\mathbf{\cos^2\theta=1-\sin^2\theta}$.

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ হইতে $\mathbf{\sec^2\theta-\tan^2\theta=1}$, $\mathbf{\tan^2\theta=\sec^2\theta-1}$.

$\text{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$ হইতে $\mathbf{cosec^2\theta-\cot^2\theta=1}$, $\mathbf{\cot^2\theta=cosec^2\theta-1}$

সূত্রগুলি কোণানুপাতের সাধারণ সংজ্ঞা হইতে প্রাপ্ত বলিয়া ঐগুলি θ-র যে কোন গ্রহণ যোগ্য মানে (θ-র যে সকল মানে কোন কোণানুপাত অর্থহীন সেই সকল মান ছাড়া) প্রযোজ্য।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $\cot\theta+\tan\theta=\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$.

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\text{cosec}\,\theta\sec\theta=\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta.$$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$.

$$\text{বামপক্ষ}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sec\theta-\tan\theta.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta)=1.$$

$$\text{বামপক্ষ}=\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=1.$$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta}.$$

$$\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta}+\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta}=\frac{\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta}$$

$$=\frac{2\operatorname{cosec}\theta}{1}=\frac{2}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\theta}.$$

$\therefore$ পক্ষান্তর করিয়া পাই,

$$\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta}.$$

উদা. 5. প্রামাণ কর যে, $\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\dfrac{\sin A+1}{\cos A}$.

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{\tan A+\sec A-(\sec^2A-\tan^2A)}{\tan A-\sec A+1}\quad[\because \sec^2A-\tan^2A=1]$$

$$=\frac{\tan A+\sec A+\tan^2A-\sec^2A}{\tan A-\sec A+1}$$

$$=\frac{(\tan A+\sec A)+(\tan A+\sec A)(\tan A-\sec A)}{\tan A-\sec A+1}$$

$$=\frac{(\tan A+\sec A)(1+\tan A-\sec A)}{\tan A-\sec A+1}=\tan A+\sec A$$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{1}{\cos A}=\frac{\sin A+1}{\cos A}=\text{দক্ষিণ পক্ষ।}$$

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\frac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}=0.$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{(\sin A-\sin B)(\sin A+\sin B)+(\cos A-\cos B)(\cos A+\cos B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$$

$$=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B+\cos^2 A-\cos^2 B}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)-(\sin^2 B+\cos^2 B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$$

$$=\frac{1-1}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}=\frac{0}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}=0.$$

উদা. 7. যদি $\sin A+\sin^2 A=1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\cos^2 A+\cos^4 A=1.$$

$\because \sin A+\sin^2 A=1, \quad \therefore \sin A=1-\sin^2 A=\cos^2 A.$

এখন, $\cos^2 A+\cos^4 A=\cos^2 A+(\cos^2 A)^2=\sin A+\sin^2 A=1.$

উদা. 8. যদি $\cos A+\sin A=\sqrt{2}\cos A$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\cos A-\sin A=\sqrt{2}\sin A.$$

দেওয়া আছে, $\cos A+\sin A=\sqrt{2}\cos A,$

বর্গ করিয়া, $\cos^2 A+\sin^2 A+2\sin A\cos A=2\cos^2 A.$

পক্ষান্তর করিয়া, $-\cos^2 A+\sin^2 A=-2\sin A\cos A$

or, $\cos^2 A-\sin^2 A=2\sin A\cos A$

or, $(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)=2\sin A\cos A$

$$\therefore \cos A-\sin A=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A+\cos A}=\frac{2\sin A\cos A}{\sqrt{2}\cos A}=\sqrt{2}\sin A.$$

উদা. 9. যদি $\tan^2 A=1+2\tan^2 B$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\cos^2 B=2\cos^2 A.$$

দেওয়া আছে, $\tan^2 A=1+2\tan^2 B$

$\therefore \sec^2 A-1=1+2(\sec^2 B-1)$ $[\because \tan^2 A=\sec^2 A-1]$

or, $\sec^2 A=2\sec^2 B$, or, $\frac{1}{\cos^2 A}=\frac{2}{\cos^2 B}$,

$\therefore \cos^2 B=2\cos^2 A.$

10·5. কোণানুপাতগুলির মানের সীমা (Limits to the values of Trigonometric Ratios).

অনুঃ 9·1 এর চিত্র 6-হইতে দেখা যায় যে x এবং y উভয়ই r অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। কেবল Quadrantal কোণের ক্ষেত্রে x ও y সাংখ্যমানে r এর সমান হইতে পারে।

সুতরাং $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান -1 হইতে $+1$ এর মধ্যবর্তী (-1 এবং $+1$ সহ)। আবার $\text{cosec}\,\theta$ এবং $\sec\theta$ যথাক্রমে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর অন্যোন্যক বলিয়া উহাদের সাংখ্যমান 1 বা 1 অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\tan\theta$ এবং $\cot\theta$ এর যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক মান হইতে পারে।

10·6. যে কোন একটি কোণানুপাতের সাহায্যে অবশিষ্ট অনুপাত সমূহ নির্ণয় (To determine other Trigonometric ratio from a given one) :

যে কোন একটি কোণানুপাত জানা থাকিলে **মূল সূত্রগুলি প্রয়োগ করিয়া** বা **জ্যামিতির সাহায্যে** অন্যান্য কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে ইহা দেখান হইল।

উদা. 1. θ কোণের কোণানুপাতগুলিকে $\sin\theta$ দ্বারা প্রকাশ কর (θ দ্বিতীয় পাদে)।

আমরা জানি, $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$, $\therefore\ \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$.

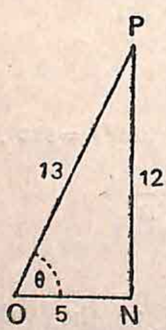
কিন্তু θ দ্বিতীয়পাদে বলিয়া $\cos\theta$ অবশ্যই ঋণাত্মক সংখ্যা ;

$$\therefore\ \cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta}.$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{-\sqrt{1-\sin^2\theta}}\ ;\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{-\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}.$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\sqrt{1-\sin^2\theta}}\ ;\ \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

উদা. 2. যদি θ সূক্ষ্মকোণ হয় এবং $\sin\theta = \frac{12}{13}$ হয়, তবে অন্যান্য কোণানুপাতগুলি নির্ণয় কর।



চিত্র 10

মনে কর, PON সমকোণী ত্রিভুজের $\angle PON = \theta$.

যেহেতু, $\sin\theta = \frac{12}{13}$,

$\therefore\ PN = 12$, এবং $OP = 13$.

এখন, $ON^2 = OP^2 - PN^2 = 13^2 - 12^2$

$= 169 - 144 = 25 = 5^2$

$\therefore\ ON = 5$ [কেবলমাত্র ধনাত্মক মান লইয়া]

$\therefore\ \cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{5}{13}$;

$\tan\theta = \frac{PN}{ON} = \frac{12}{5}$; $\cot\theta = \frac{ON}{PN} = \frac{5}{12}$;

$\sec\theta = \frac{OP}{ON} = \frac{13}{5}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{OP}{PN} = \frac{13}{12}$.

টীকা : θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ না হইলেও θ কে সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া লইয়া এইভাবে জ্যামিতিক পদ্ধতির সাহায্যে কোন প্রদত্ত কোণানুপাত হইতে অপর কোণানুপাত নির্ণয় করা যায়। তখন প্রথমে উহার সাংখ্যমান বাহির করিয়া পরে θ যে পাদে অবস্থিত সেই পাদ অনুযায়ী অনুপাতটির চিহ্ন ঠিক করিয়া লইতে হয়।

উদা. 3. যদি θ সূক্ষ্মকোণ হয় এবং $\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta=4$ হয়, তবে $\cos\theta=$ কত ?

দেওয়া আছে, $\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta=4$ $\therefore$ $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}=4$,

or, $\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta}=4$, or, $\cos\theta+1=4\sin\theta$, or, $\cos\theta+1=4\sqrt{1-\cos^2\theta}$,

বর্গ করিয়া, $\cos^2\theta+2\cos\theta+1=16(1-\cos^2\theta)$

or, $17\cos^2\theta+2\cos\theta-15=0$, or, $17\cos^2\theta+17\cos\theta-15\cos\theta-15=0$,

or, $17\cos\theta(\cos\theta+1)-15(\cos\theta+1)=0$,

or, $(\cos\theta+1)(17\cos\theta-15)=0$,

$\therefore$ $\cos\theta=-1$, or, $\dfrac{15}{17}$; সূক্ষ্মকোণ বলিয়া $\cos\theta$ এর মান ঋণাত্মক হইবে না।

$\therefore$ $\cos\theta=\dfrac{15}{17}$.

উদা. 4. যদি $\cos\theta=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ হয়, তবে দেখাও যে $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\dfrac{p}{q}$.

দেওয়া আছে, $\cos\theta=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$,

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{(p^2-q^2)^2}{(p^2+q^2)^2}}=\sqrt{\frac{(p^2+q^2)^2-(p^2-q^2)^2}{(p^2+q^2)^2}}$$

$$=\frac{2pq}{p^2+q^2},$$

এখন, $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{p^2+q^2}{2pq}+\dfrac{p^2-q^2}{2pq}=\dfrac{2p^2}{2pq}=\dfrac{p}{q}$.

প্রশ্নমালা 2A

নিম্নের অভেদগুলি পূরণ কর :

1. $\sin\theta\cot\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}$. 2. $\cos\theta\tan\theta\operatorname{cosec}\theta=1$.

3. $\dfrac{1}{1+\tan A}=\dfrac{\cot A}{1+\cot A}$. 4. $\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta=1$.

5. $\cos^2 A-\sin^2 A=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$. 6. $\dfrac{1}{\cos^2 A}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 A-1}=1$.

7. $\cos A+\tan A\sin A=\sec A$. 8. $\dfrac{1}{\cot A+\tan A}=\sin A\cos A$.

9. $(1+\tan^2 A)(1-\sin^2 A)=1$. 10. $(\cos\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2=\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$.

11. $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$. 12. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}=\left(\dfrac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2$.

13. $1+\dfrac{\cot^2 A}{1+\operatorname{cosec} A}=\operatorname{cosec} A$.

14. $\dfrac{1}{\sec\theta+\tan\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$.

15. $\cos^6 A-\sin^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$.

16. $\operatorname{cosec}^6 A-\cot^6 A=1+3\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A$.

17. $\sin^2\theta\,(1+\cot^2\theta)+\cos^2\theta\,(1+\tan^2\theta)=2$.

18. $(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$.

19. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$.

20. $\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A=\tan^2 A+\cot^2 A+2$.

21. $\dfrac{\sec^4\theta-2\sec^2\theta\tan^2\theta+\tan^4\theta}{\operatorname{cosec}^4\theta-2\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta+\cot^4\theta}=1$.

22. $\dfrac{\cos^2\theta}{1-\tan^2\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cot^2\theta}=1$.

23. $1+\tan\theta+\sec\theta=\dfrac{2}{1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta}$.

24. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=2\cot\theta$.

25. $1+\sec\alpha+\tan\alpha=\dfrac{2}{1-\operatorname{cosec}\alpha+\cot\alpha}$.

26. $\dfrac{2\sin A}{1+\cos A+\sin A}=\dfrac{1-\cos A+\sin A}{1+\sin A}$.

27. $\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A$.

28. (i) $\cos\theta=\frac{3}{5}$ হইলে, $\sin\theta$ এবং $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর, θ ১ম পাদে।

(ii) $\tan\theta=\frac{12}{5}$ হইলে, $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর, θ ৩য় পাদে।

(iii) $\sec\theta=3$ হইলে, $\sin\theta$ এবং $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর, θ ৪র্থ পাদে।

(iv) $\cot\theta=\frac{15}{8}$ হইলে, $\cos\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$ এর মান নির্ণয় কর, θ ৩য় পাদে।

29. $\tan\theta=x$ হইলে, দেখাও যে (θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ),

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{এবং} \quad \sin\theta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

30. (i) $\tan\theta=\dfrac{-b}{a}$ হইলে, $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর, θ ২য় পাদে।

(ii) $\cos\theta=\dfrac{p}{q}$ হইলে, $\sin\theta$ এবং $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর, θ ৪র্থ পাদে।

(iii) $\sin\theta=\dfrac{m}{n}$ হইলে, $\cos\theta$ এবং $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর, θ ২য় পাদে।

(iv) $\sin\theta=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ হইলে, $\cos\theta$ এবং $\cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর, θ ১ম পাদে।

31. (i) $1-2\sin\theta\cos\theta$ কে পূর্ণ বর্গে প্রকাশ কর।

(ii) $1+4\sec^2 A\tan^2 A$ কে পূর্ণ বর্গে প্রকাশ কর।

32. সরল কর :—

(i) $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2$.

(ii) $\cos^2 A\cos^2 B+\sin^2 A\sin^2 B+\cos^2 A\sin^2 B+\cos^2 B\sin^2 A$.

(iii) $\dfrac{1-\tan\theta}{\cot\theta-1}-\dfrac{1+\tan\theta}{\cot\theta+1}$.

(iv) $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}+\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}$.

107. অপনয়ন (Elimination) : মনে কর, এমন দুইটি সমীকরণ প্রদত্ত আছে, যাহাদের প্রত্যেকটিতে θ কোণের কোণানুপাত বর্তমান। এখন, এই দুইটি সমীকরণ হইতে θ বর্জিত তৃতীয় একটি সমীকরণ নির্ণয়ের প্রণালীকে বলা হয় **অপনয়ন**। অপনয়নের দ্বারা প্রাপ্ত সমীকরণটিকে অর্থাৎ θ বর্জিত তৃতীয় সমীকরণটিকে **অপনয়ন ফল** বা **অপনীতক** (Eliminant) বলে।

সহজ অপনয়ন

যদি প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়, $\cos\theta=p$, $\sin\theta=q$, আকারবিশিষ্ট হয়, অথবা, উহাদিগকে উক্ত আকারে পরিণত করা সম্ভব হয়, তাহা হইলে, বর্গ করিয়া যোগ করিলে পাইব, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=p^2+q^2$, অর্থাৎ, $p^2+q^2=1$; সুতরাং θ অপনীত হইল। এখানে, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, এই মূল সূত্রটি প্রয়োগ করা হইয়াছে।

তেমনি ভাবে, সমীকরণদ্বয় যদি $\sec\theta=h$, $\tan\theta=k$, অথবা, $\operatorname{cosec}\theta=m$, $\cot\theta=n$, আকার-বিশিষ্ট হয় বা উক্ত আকারে রূপান্তরযোগ্য হয়, তাহা হইলে, $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$, বা, $\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$, এই মূল সূত্র প্রয়োগ করিয়া θ কে অপনয়ন করা সম্ভব।

নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল :—

উদা. 1. $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, সমীকরণদ্বয় হইতে θ অপনয়ন কর।

$$x=a\cos\theta,\quad\therefore\quad \cos\theta=\frac{x}{a}\quad\ldots\quad\ldots\qquad(1)$$

$$y=b\sin\theta,\quad\therefore\quad \sin\theta=\frac{y}{b}\quad\ldots\quad\ldots\qquad(2)$$

(1) এবং (2) বর্গ করিয়া যোগ করিলে পাই,

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ \text{or},\ 1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},$$ নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 2. $x=2\sin\theta-\cos\theta$, এবং $y=\sin\theta-3\cos\theta$ হইতে θ-কে অপনয়ন কর।

প্রথম সমীকরণকে অপরিবর্তিত রাখিয়া এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই, $x=2\sin\theta-\cos\theta$ ... ... (1)

$2y=2\sin\theta-6\cos\theta$ ... ... (2)

বিয়োগ করিয়া, $x-2y=5\cos\theta$, $\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{5}(x-2y)$ ... (3)

$\cos\theta$-এর মান প্রথম সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$x=2\sin\theta-\tfrac{1}{5}(x-2y), \text{ or, } 2\sin\theta=x+\tfrac{1}{5}(x-2y)=\frac{5x+x-2y}{5}$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\tfrac{1}{5}(3x-y) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

(3) ও (4) কে বর্গ করিয়া এবং যোগ করিয়া পাই,

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\{\tfrac{1}{5}(x-2y)\}^2+\{\tfrac{1}{5}(3x-y)\}^2,$$

or, $1=\frac{1}{25}(x^2-4xy+4y^2)+\frac{1}{25}(9x^2-6xy+y^2)$,

or, $10x^2-10xy+5y^2=25$.

$\therefore$ $2x^2-2xy+y^2=5$, নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 3. নিম্নের সমীকরণ দুইটি হইতে θ কে অপনয়ন কর :—

$$a\cos\theta+b\sin\theta+c=0$$
$$a'\cos\theta+b'\sin\theta+c'=0.$$

বজ্র-গুণন দ্বারা পাই,

$$\frac{\cos\theta}{bc'-b'c}=\frac{\sin\theta}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b},$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\quad \sin\theta=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\ ;$$

বর্গ করিয়া যোগ করিলে পাই,

$$1=\left(\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}\right)^2+\left(\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right)^2,$$

অর্থাৎ, $(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2=(ab'-a'b)^2$, নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 4. $x\sin^3\alpha+y\cos^3\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$ এবং $x\sin\alpha-y\cos\alpha=0$ হইলে, দেখাও যে $x^2+y^2=1$.

$x\sin\alpha-y\cos\alpha=0$, হইতে পাই, $x\sin\alpha=y\cos\alpha$,

$$\therefore\quad \frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\sin\alpha}=k \text{ (ধর)}$$

তাহা হইলে, $x=k\cos\alpha$, $y=k\sin\alpha$.

প্রথম সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$k\cos\alpha\sin^3\alpha+k\sin\alpha\cos^3\alpha=\sin\alpha\cos\alpha,$$

or, $k\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha$,

or, $k\sin\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$, $\therefore$ $k=1$.

$\therefore$ $x=k\cos\alpha=\cos\alpha$, $y=k\sin\alpha=\sin\alpha$.

বর্গ করিয়া যোগ করিলে পাই, $x^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$,

অর্থাৎ, $x^2+y^2=1$.

উদা. 5. যদি $\tan A+\sin A=m$ এবং $\tan A-\sin A=n$ হয়, তবে দেখাও যে $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$.

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটিকে যোগ করিয়া পাই, $m+n=2\tan A \quad \cdots \quad \cdots(1)$

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি বিয়োগ করিয়া পাই, $m-n=2\sin A \quad \cdots \quad \cdots(2)$

$\therefore\ m^2-n^2=(m+n)(m-n)=2\tan A.\ 2\sin A=4\tan A\sin A \cdots(3)$

আবার, $4mn=(m+n)^2-(m-n)^2=4\tan^2 A-4\sin^2 A$

$$=4(\tan^2 A-\sin^2 A),$$

$$\therefore\ mn=\tan^2 A-\sin^2 A=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}-\sin^2 A=\sin^2 A(\sec^2 A-1)$$

$$=\sin^2 A\tan^2 A$$

$$\therefore\ \sqrt{mn}=\sin A\tan A \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(4)$$

(3) ও (4) হইতে ইহা স্পষ্ট যে, $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$.

প্রশ্নমালা 2B

1. $x=a\sec\theta$ এবং $y=b\tan\theta$ হইতে θ-কে অপনয়ন কর।

2. $x=c(\sec\theta+\tan\theta)$ এবং $y=c(\sec\theta-\tan\theta)$ হইতে θ-কে অপনয়ন কর।

3. যদি $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ এবং $b\cos\theta-a\sin\theta=d$ হয়, তবে দেখাও যে, $c^2+d^2=a^2+b^2$.

4. $a\sec\theta-x\tan\theta=y$ এবং $b\sec\theta+y\tan\theta=x$, হইতে θ-কে অপনয়ন কর।

5. $3\sec\alpha-\tan\alpha=x$, এবং $2\sec\alpha+\tan\alpha=y$, হইতে α-কে অপনয়ন কর।

6. $a\tan^2\theta+b\tan\theta+c=0$, এবং $a'\tan^2\theta+b'\tan\theta+c'=0$ হইতে θ-কে অপনয়ন কর।

10·8. কয়েকটি নির্দিষ্ট কোণের কোণানুপাত (Trigonometric Ratios of some standard angles) ঃ

(i) 30° এবং 60° কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় ঃ

মনে কর, $\angle AOB = 30°$.

OB সরলরেখার উপর একটি বিন্দু P লও এবং P বিন্দু হইতে OA-র উপর PN লম্ব অঙ্কন কর। এখন, OPN ত্রিভুজের $\angle OPN = 60°$. PN-কে Q পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত কর যেন NQ=PN হয়। QO যোগ কর।

এখন, OPN এবং OQN ত্রিভুজ দুইটির PN=NQ, ON সাধারণ বাহু এবং $\angle ONP = \angle ONQ$, [প্রত্যেকে সমকোণ বলিয়া]

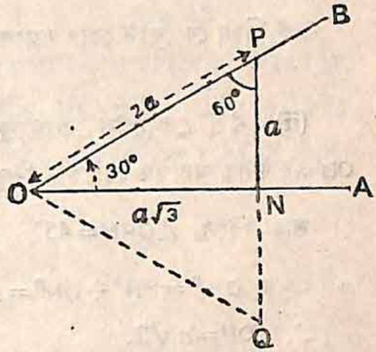
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ $\angle QON = 30°$,

$\therefore$ $\angle POQ = 60°$,

আবার, $\angle P = \angle Q = 60°$;

$\therefore$ POQ ত্রিভুজটি সমবাহু।



চিত্র 11

মনে কর, $OP = 2a$,

তাহা হইলে, $PN = \frac{1}{2}PQ = a$ [$\because$ PQ=OP]

$\therefore$ $ON = \sqrt{OP^2 - PN^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

এখন, $\sin 30° = \frac{PN}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$; $\sin 60° = \frac{ON}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos 30° = \frac{ON}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{PN}{OP} = \frac{1}{2}$.

$\tan 30° = \frac{PN}{ON} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\tan 60° = \frac{ON}{PN} = \sqrt{3}$.

$\cot 30° = \frac{ON}{PN} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$; $\cot 60° = \frac{PN}{ON} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\sec 30° = \frac{OP}{ON} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\sec 60° = \frac{OP}{PN} = 2$.

$\operatorname{cosec} 30° = \frac{OP}{PN} = \frac{2a}{a} = 2$; $\operatorname{cosec} 60° = \frac{OP}{ON} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

টীকা : কোন কোণের sine এবং cosine বাহির করিতে পারিলে অন্যান্য অনুপাতগুলির sine এবং cosine হইতেই পাওয়া যায়। যেমন,

$\sin 30° = \frac{1}{2}$ এবং $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ জানিবার পর $\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \sqrt{3}$,

$$\cot 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ এবং $\operatorname{cosec} 30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2.$

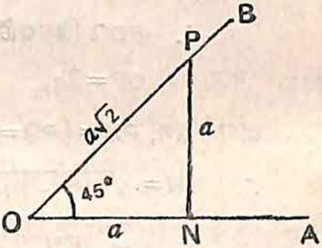
এই নিয়ম যে কোন কোণ সম্বন্ধেই প্রযোজ্য।

(ii) **45° কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় :** মনে কর $\angle AOB = 45°$. OB এর উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P হইতে OA-র উপর PN লম্ব অঙ্কন কর।

তাহা হইলে, $\angle OPN = 45°$, $\therefore$ $PN = ON = a$ (ধর)

এখন, $OP^2 = PN^2 + ON^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\therefore$ $OP = a\sqrt{2}$.



চিত্র 12

এখন, $\sin 45° = \frac{PN}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\cos 45° = \frac{ON}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\tan 45° = \frac{PN}{ON} = \frac{a}{a} = 1$;

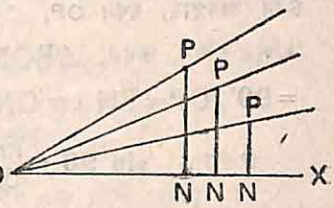
$\cot 45° = \frac{ON}{PN} = \frac{a}{a} = 1$; [অথবা, $\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = 1$]

$\sec 45° = \frac{OP}{ON} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$; [অথবা, $\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$]

$\operatorname{cosec} 45° = \frac{OP}{PN} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

[অথবা, $\operatorname{cosec} 45° = \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$]

(iii) 0° কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় : মনে কর, ঘূর্ণায়মান সরলরেখা OP ইহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আরম্ভ করিয়া, ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে কেবলমাত্র ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া একটি অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক কোণ XOP উৎপন্ন করিল।



চিত্র 13

OP বাহুর P বিন্দু হইতে OX এর উপর PN লম্ব অঙ্কন কর।

এখন OP রেখার দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত রাখিয়া OP রেখাটিকে, ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে, সেইদিকে ঘুরাইতে থাকিলে, XOP কোণটি ধনাত্মক থাকিয়াই ক্রমাগত ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হইতে থাকিবে। ইহার ফলে PN ক্রমশঃ ক্ষুদ্র হইতে থাকিবে এবং ON ধীরে ধীরে বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে। চরম অবস্থায়, OP যখন OX এর সহিত মিলিত হইবে, তখন, $\angle \mathbf{PON} = \angle \mathbf{POX} = \mathbf{0}^\circ$, $\mathbf{PN} = \mathbf{0}$, এবং $\mathbf{OP} = \mathbf{ON}$ হইবে।

সুতরাং, $\sin 0^\circ = \frac{PN}{OP} = \frac{0}{OP} = 0$;

$$\cos 0^\circ = \frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1 ;$$

$$\tan 0^\circ = \frac{PN}{ON} = \frac{0}{ON} = 0 ;$$

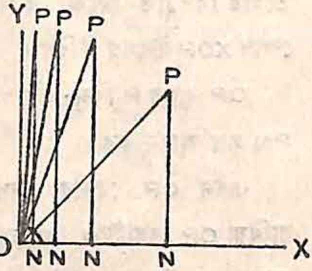
$\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0}$ [0-হরবিশিষ্ট সংখ্যার অস্তিত্ব নাই বলিয়া cot 0° অর্থহীন (undefined)]

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{1} = 1 ;$$

$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0}$ [অর্থহীন (undefined)].

(iv) 90° কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় : মনে কর, ঘূর্ণায়মান সরলরেখা OP ইহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিতে ঘুরিতে OX এর উপর অঙ্কিত লম্ব OY এর দিকে অগ্রসর হইতে লাগিল এবং OP রেখাটি OY এর অতি নিকটবর্তী হইয়া XOP কোণটি উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে, XOP কোণের পরিমাণ প্রায় 1 সমকোণ বা 90°. OP রেখার P বিন্দু হইতে OX এর উপর PN লম্ব অঙ্কন কর।

এখন OP রেখা OY এর দিকে আরও অগ্রসর হইতে থাকিলে, XOP কোণ 90° এর দিকে অগ্রসর হইয়া উহার সমান হইতে চলিবে, ON ক্রমশঃ ক্ষুদ্র হইতে থাকিবে, এবং PN বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে। চরম অবস্থায়, যখন OP, OY এর সহিত মিলিত হইবে, তখন, **∠PON = ∠XOP = 90°, OP = PN** এবং **ON = 0**, হইবে।



চিত্র 14

সুতরাং, $\sin 90^\circ = \frac{PN}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1$;

$\cos 90^\circ = \frac{ON}{OP} = \frac{0}{OP} = 0$;

$\left[\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}\right.$; অর্থহীন (undefined)]

$\cot 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$;

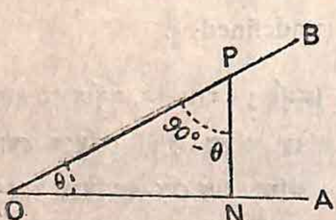
$\left[\sec 90^\circ = \frac{1}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}\right.$; অর্থহীন (undefined)]

$\operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1.$

10·9. পূরক কোণদ্বয়ের কোণানুপাত (Trigonometrical ratios of complementary angles) :

[দুইটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণ হইলে, উহাদিগকে **পূরক কোণ** (complementary angles) বলে এবং উক্ত কোণদ্বয়ের একটিকে অপরটির **পূরক** (complement) বলে।]

মনে কর, $\angle AOB = \theta$; OB এর উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু P হইতে OA এর উপর PN লম্ব অঙ্কন কর। তাহা হইলে, $\angle NPO = 90^\circ - \theta$.



চিত্র 15

NPO কোণের সম্পর্কে ON, বিপরীত বাহু বা লম্ব এবং NP, সন্নিহিত বাহু বা ভূমি।

সুতরাং, পার্শ্বের চিত্র হইতে পাই,

$\sin (90^\circ - \theta) = \sin NPO = \frac{ON}{OP} = \cos \theta$;

$$\cos(90^\circ-\theta)=\cos \text{NPO}=\frac{\text{NP}}{\text{OP}}=\sin\theta;$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\tan \text{NPO}=\frac{\text{ON}}{\text{NP}}=\cot\theta;$$

$$\cot(90^\circ-\theta)=\cot \text{NPO}=\frac{\text{NP}}{\text{ON}}=\tan\theta;$$

$$\sec(90^\circ-\theta)=\sec \text{NPO}=\frac{\text{OP}}{\text{NP}}=\text{cosec}\,\theta;$$

$$\text{cosec}\,(90^\circ-\theta)=\text{cosec NPO}=\frac{\text{OP}}{\text{CN}}=\sec\theta.$$

দ্রষ্টব্য : (i) লক্ষ্য করিলে বুঝিতে পারা যাইবে যে দুইটি পূরক কোণের,
একটির sine = অপরটির cosine,
একটির tangent = অপরটির cotangent,
একটির secant = অপরটির cosecant.

(ii) 60° এবং 30° পরস্পর পূরক বলিয়া,
$\sin 60^\circ=\cos 30^\circ$,
$\cos 60^\circ=\sin 30^\circ$,
$\tan 60^\circ=\cot 30^\circ$, ইত্যাদি।

10·10. 0°, 30°, 45°, 60° ও 90° কোণগুলির অনুপাতগুলির তালিকা—

Angle	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

টীকা : sin ও cos জানা থাকিলে অন্যান্য কোণানুপাতগুলি সহজেই নির্ণয় করা যায়। সুতরাং, sin ও cos এর মানগুলি মুখস্থ রাখিবে। তবে, ঐ দুইটির মান মনে রাখিবার একটি কৌশল আছে। 0, 1, 2, 3, ও 4, লিখিয়া প্রত্যেকটি 4 দ্বারা ভাগ করিয়া তারপর বর্গমূল নির্ণয় কর। এই বর্গমূলগুলিই অর্থাৎ $\sqrt{\frac{0}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{2}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{4}{4}}$ যথাক্রমে 0°, 30°, 45°, 60° ও 90° কোণের sin এবং যথাক্রমে 90°, 60°, 45°, 30°, 0° কোণের cos হইবে।

বিবিধ প্রশ্নের উদাহরণমালা

উদা. 1. $\cot^2 30° - 2\cos^2 60° - \frac{3}{4}\sec^2 45° - 4\sin^2 30°$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (\sqrt{3})^2 - 2(\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{3}{4}(\sqrt{2})^2 - 4(\tfrac{1}{2})^2$$
$$= 3 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2} - 1 = 0.$$

উদা. 2. দেখাও যে, $\cos 30° = \cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30°$.

$$\text{ডানপক্ষ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$
$$= \text{বামপক্ষ।}$$

উদা. 3. $\theta = 30°$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$.

যেহেতু, $\theta = 30°$, $\therefore\ 2\theta = 60°$;

$\therefore$ বামপক্ষ $= \sin 2\theta = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\text{এবং ডানপক্ষ} = \frac{2\tan 30°}{1+\tan^2 30°} = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ।

উদা. 4. দেখাও যে, $\sqrt{\dfrac{1+\cos 30°}{1-\cos 30°}} = \sec 60° + \tan 60°$.

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} = 2+\sqrt{3}.$$

ডানপক্ষ $= 2+\sqrt{3}$; $\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ।

উদা. 5. দেখাও যে, $\dfrac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°} = \sqrt{3}$.

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2} = \sqrt{3}.$$

উদা. 6. θ যদি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয়, এবং $2 \operatorname{cosec} \theta = 3 + 2 \sin \theta$ হয়, তবে θ-র মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই, $\dfrac{2}{\sin \theta} = 3 + 2 \sin \theta$,

or, $2 = 3 \sin \theta + 2 \sin^2\theta$, or, $2 \sin^2\theta + 3 \sin \theta - 2 = 0$,

or, $2 \sin^2\theta + 4 \sin \theta - \sin \theta - 2 = 0$, or, $(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) = 0$,

$\therefore$ হয়, $2 \sin \theta - 1 = 0$ ... (1), না হয়, $\sin \theta + 2 = 0$ ...(2)

(1) হইতে পাই, $\sin \theta = \frac{1}{2}$, $\therefore \theta = 30°$.

(2) হইতে পাই, $\sin \theta = -2$; θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ বলিয়া $\sin \theta$ ঋণাত্মক হইতে পারে না (এবং উহার পরমমান কখনই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হয় না)

$\therefore \sin \theta = -2$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore \theta = 30°$.

টীকা : যে ত্রিকোণমিতিক সম্পর্ক হইতে কোন কোণের মান নির্ণয় করা সম্ভব তাহাকে **ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ** (Trigonometrical equation) বলে। ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ হইতে কোণের মান নির্ণয় করাকে বলে সমীকরণের সমাধান করা।

উদা. 6. এ $2 \operatorname{cosec} \theta = 3 + 2 \sin \theta$, একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ এবং উহাকে সমাধান করিয়া আমরা $\theta = 30°$, পাইয়াছি।

উদা. 7. সমাধান কর : $\tan \theta - \cot \theta = \operatorname{cosec} \theta$ $[0 < \theta < 90°]$

$\tan \theta - \cot \theta = \operatorname{cosec} \theta$

or, $\dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} - \dfrac{\cos \theta}{\sin \theta} = \dfrac{1}{\sin \theta}$, or, $\dfrac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\cos \theta \sin \theta} = \dfrac{1}{\sin \theta}$,

or, $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos \theta$, or, $1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta = \cos \theta$,

or, $2 \cos^2\theta + \cos \theta - 1 = 0$,

or, $2 \cos^2\theta + 2 \cos \theta - \cos \theta - 1 = 0$,

or, $2 \cos \theta (\cos \theta + 1) - 1(\cos \theta + 1) = 0$,

or, $(\cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1) = 0$.

$\therefore \cos \theta + 1 = 0$ ...(1), অথবা, $2 \cos \theta - 1 = 0$ ... ...(2)

(1) হইতে পাই, $\cos \theta = -1$, এখন, যেহেতু, $0 < \theta < 90°$, $\cos \theta$ এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না। সুতরাং, $\cos \theta = -1$ গ্রহণযোগ্য নয়।

(2) হইতে পাই, $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\therefore \theta = 60°$.

$\therefore \theta = 60°$, নির্ণেয় সমাধান।

প্রশ্নমালা 2C

মান নির্ণয় কর :—

1. $\sin^2 45^\circ \cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ \cos^2 45^\circ$. **2.** $\cot^2 45^\circ + \sec^2 45^\circ$.

3. $4 \sin^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ + \text{cosec}^2 30^\circ$. [C. U. 1940]

4. $\tan^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \tan 60^\circ + \cos^2 30^\circ$.

5. $3 \tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \cot^2 30^\circ + \frac{1}{8} \sec^2 45^\circ$. [C. U. 1951]

6. $\tan^2 45^\circ \sin 60^\circ \tan 30^\circ \tan^2 60^\circ$. [C. U. 1949]

7. $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^3 \frac{\pi}{6} - \cos^3 \frac{\pi}{3}$.

প্রমাণ কর যে :—

8. $\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = \dfrac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$.

9. $\cos 60^\circ = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \dfrac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$.

10. $1 - 2 \sin^2 30^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1 = \cos 60^\circ$.

11. $\tan 60^\circ = \dfrac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$.

12. $\sin \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{4}$.

13. যদি $x \sin^2 30^\circ + 4 \cos^2 45^\circ = 7 \tan^2 60^\circ$ হয়, তবে x = কত ?

14. যদি $x \sec^2 60^\circ - y \sin^2 30^\circ = 7$, এবং

$x \cos^2 30^\circ + y \tan^2 45^\circ = 5\frac{1}{2}$ হয়, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

θ যদি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয় তবে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :—

15. $\cos \theta + 2 \sin^2 \theta = 2$. **16.** $\sin^2 \theta = \cos^2 \theta$.

17. $3 \sec \theta \tan \theta = 2$. **18.** $\cot \theta + \tan \theta = 2$.

19. $\tan^2 \theta = 3 \text{cosec}^2 \theta - 1$. **20.** $\sin^2 \theta - 3 \cos^2 \theta = 0$.

21. $\text{cosec}\, \theta \cot \theta = 2\sqrt{3}$.

22. $2 \sin^2 \theta = 3 \cos \theta$.

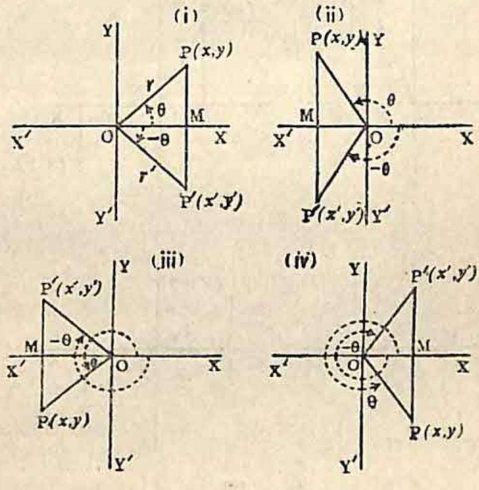
23. $2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1$.

তৃতীয় অধ্যায়

একটি নির্দিষ্ট কোণের সহিত যুক্ত কোণসমূহের কোণানুপাত নির্ণয় (To find the Trigonometrical ratios of angles associated with a given angle.)

11. θ **কোণের কোণানুপাতের মাধ্যমে** $(-\theta)$ **কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।** [Trigonometric functions of $(-\theta)$ in terms of those of θ].

যে কোন কোণ θ লও এবং $(-\theta)$ কোণটি অঙ্কন কর। এখন θ-র পরিমাণ অনুযায়ী উহা I, II, III, IV এর যে কোন একটিতে অবস্থিত হইলে $(-\theta)$ যথাক্রমে IV, III, II, I-এ অবস্থিত হইবে।



চিত্র 16

θ **এর** অন্তিম বাহুর উপর P (x, y) এবং $(-\theta)$ এর অন্তিম বাহুর উপর P′ (x', y') এরূপে লও যেন OP=OP′ হয়।

PP′ যুক্ত কর, মনে কর উহা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর, OP$=r$, OP′$=r'$.

এখন, $\triangle OPM \cong \triangle OP'M$ [বাহু-কোণ-বাহু]

$\therefore$ PP′, x-অক্ষের উপর লম্ব। প্রতি চিত্রে $r'=r$, $x'=x$, $y'=-y$.

তাহা হইলে, $\sin(-\theta)=\dfrac{y'}{r'}=\dfrac{-y}{r}=-\sin\theta$; [অনু: 9·1 এর সংজ্ঞানুসারে]

$\therefore$ $\operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$.

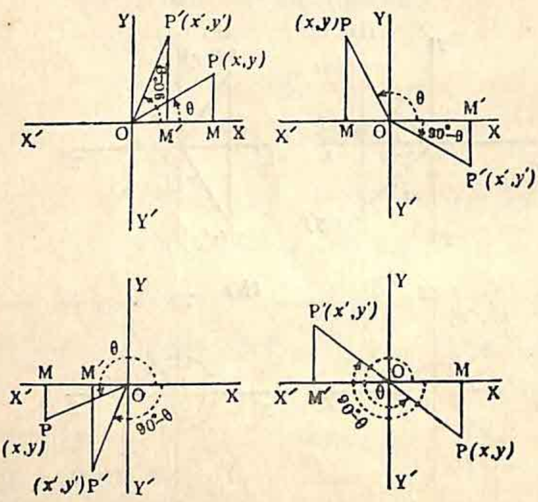
$\cos(-\theta)=\dfrac{x'}{r'}=\dfrac{x}{r}=\cos\theta$, $\therefore$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$.

$\tan(-\theta)=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{-y}{x}=-\tan\theta$, $\therefore$ $\cot(-\theta)=-\cot\theta$.

অতএব, $\mathbf{\sin(-\theta)=-\sin\theta}$, $\mathbf{\cos(-\theta)=\cos\theta}$.

$\mathbf{\tan(-\theta)=-\tan\theta}$.

12. θ কোণের কোণানুপাতের মাধ্যমে $(90^\circ-\theta)$ কোণের কোণানুপাত নির্ণয় [To find the Trigonometric functions of $(90^\circ-\theta)$ in terms of those of θ].



চিত্র 17

যে-কোন কোণ θ লও ও $(90^\circ-\theta)$ কোণটি অংকন কর। এখন,

θ যদি I পাদে অবস্থিত হয় তবে $(90^\circ-\theta)$ I পাদে অবস্থিত হইবে।
θ „ II „ „ „ „ $(90^\circ-\theta)$ IV „ „ „ ।
θ „ III „ „ „ „ $(90^\circ-\theta)$ III „ „ „ ।
এবং, θ „ IV „ „ „ „ $(90^\circ-\theta)$ II „ „ „ ।

θ এর অন্তিম বাহুর উপর P (x, y) এবং $(90° - \theta)$ এর অন্তিম বাহুর উপর P′ (x', y') এরূপে লও যেন, OP = OP′ হয়। মনে কর, OP = r এবং OP′ = r', P ও P′ হইতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে, PM ও P′M′ লম্ব টান।

এখন, $\because$ $\angle POM = \angle OP'M'$, $\angle OMP = \angle OM'P'$ এবং OP = OP′,

$\therefore$ $\triangle OPM \equiv \triangle OP'M'$; $\therefore$ $y' = x$, $x' = y$ এবং $r' = r$.

$\therefore$ $\sin(90° - \theta) = \frac{y'}{r'} = \frac{x}{r} = \cos\theta$; [অনুঃ 9·1 এর সংজ্ঞানুসারে]

$\therefore$ $\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$.

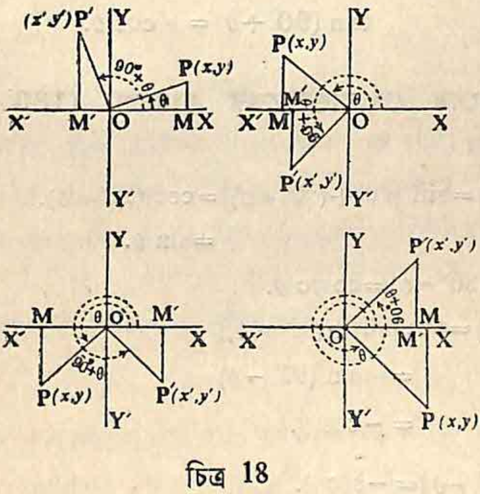
$\cos(90° - \theta) = \frac{x'}{r'} = \frac{y}{r} = \sin\theta$, $\therefore$ $\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$.

$\tan(90° - \theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \cot\theta$, $\therefore$ $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$.

অতএব, $\mathbf{\sin(90° - \theta) = \cos\theta, \cos(90° - \theta) = \sin\theta,}$

$\mathbf{\tan(90° - \theta) = \cot\theta.}$

13. θ **কোণের কোণানুপাতের মাধ্যমে $(90° + \theta)$ কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।**



চিত্র 18

যে কোন কোণ θ লও এবং $(90° + \theta)$ কোণটি অংকন কর। এখন যদি θ অবস্থিত হয় I, II, III বা, IV পাদে, তবে $(90° + \theta)$ অবস্থিত হইবে যথাক্রমে II, III, IV বা, I পাদে।

θ ও $(90^\circ+\theta)$ এর অন্তিম বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে P (x, y) ও P′ (x', y') লও যেন OP = O′P′ হয়। মনে কর, OP $= r$, O′P′ $= r'$. P ও P′ হইতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও P′M′ লম্ব টান।

এখন, $\because$ $\angle POM = \angle OP'M'$, $\angle PMO = \angle P'M'O$ এবং $OP = O'P'$.

$\therefore$ $\Delta OPM \cong \Delta OP'M'$, $\therefore$ $M'P' = OM$, $O'M' = MP$.

$\therefore$ $r' = r$, $y' = x$ এবং $x' = -y$.

$\therefore$ $\sin(90^\circ+\theta) = \frac{y'}{r'} = \frac{x}{r} = \cos\theta$, $\therefore$ $\text{cosec}(90^\circ+\theta) = \sec\theta$.

$\cos(90^\circ+\theta) = \frac{x'}{r'} = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$,

$\therefore$ $\sec(90^\circ+\theta) = -\text{cosec}\,\theta$.

$\tan(90^\circ+\theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = -\cot\theta$,

$\therefore$ $\cot(90^\circ+\theta) = -\tan\theta$.

অতএব, $\mathbf{\sin(90^\circ+\theta) = \cos\theta}$, $\mathbf{\cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta}$,

$\mathbf{\tan(90^\circ+\theta) = -\cot\theta}$.

14. θ কোণের কোণানুপাতের মাধ্যমে $(180^\circ-\theta)$ কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

$\sin(180^\circ-\theta) = \sin\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\} = \cos(90^\circ-\theta)$. [অনু: 13]

$= \sin\theta$. [অনু: 12]

$\therefore$ $\text{cosec}(180^\circ-\theta) = \text{cosec}\,\theta$.

$\cos(180^\circ-\theta) = \cos\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}$

$= -\sin(90^\circ-\theta)$ [অনু: 13]

$= -\cos\theta$. [অনু: 12]

$\therefore$ $\sec(180^\circ-\theta) = -\sec\theta$.

$\tan(180^\circ-\theta) = \tan\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\} = -\cot(90^\circ-\theta)$

$= -\tan\theta$.

$\therefore$ $\cot(180^\circ-\theta) = -\cot\theta$.

15. θ **কোণের কোণানুপাতের মাধ্যমে $(180^\circ+\theta)$ কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।**

$\sin(180^\circ+\theta)=\sin\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta.$

$\therefore\ \text{cosec}(180^\circ+\theta)=-\text{cosec}\,\theta.$

$\cos(180^\circ+\theta)=\cos\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\sin(90^\circ+\theta)=-\cos\theta.$

$\therefore\ \sec(180^\circ+\theta)=-\sec\theta.$

$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\cot(90^\circ+\theta)=\tan\theta.$

$\therefore\ \cot(180^\circ+\theta)=\cot\theta.$

16. θ **কোণের কোণানুপাতের মাধ্যমে $(270^\circ\pm\theta)$ কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।**

পূর্বে লব্ধ ফলগুলির সাহায্যে $(270^\circ\pm\theta)$ কোণের কোণানুপাত θ কোণের কোণানুপাতের মাধ্যমে সহজেই নির্ণয় করা যায়।

যেমন, $\sin(270^\circ\pm\theta)=\sin\{180^\circ+(90^\circ\pm\theta)\}=-\sin(90^\circ\pm\theta)$

[অনু: 15]

$=-\cos\theta.$

$\cos(270^\circ+\theta)=\cos\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\cos(90^\circ+\theta)=\sin\theta.$

$\cos(270^\circ-\theta)=\cos\{180^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\cos(90^\circ-\theta)=-\sin\theta.$

$\tan(270^\circ+\theta)=\tan\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta.$

$\tan(270^\circ-\theta)=\tan\{180^\circ+(90^\circ-\theta)\}=\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta.$

17. **$(360^\circ\pm\theta)$ এবং $(n.360^\circ\pm\theta)$ কোণ সমূহের কোণানুপাত নির্ণয়।**

n যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে $n.360^\circ+\theta$ এবং θ কোণগুলি Co-terminal; আবার $n.360^\circ-\theta$ এবং $-\theta$ কোণগুলি Co-terminal. যেহেতু Co-terminal কোণগুলির অন্তিম বাহুগুলি পরস্পরের সহিত মিলিয়া যায়, অতএব Co-terminal কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলি অভিন্ন।

অতএব,

$\sin(n.360^\circ+\theta)=\sin\theta$ এবং $\sin(n.360^\circ-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$.
$\cos(n.360^\circ+\theta)=\cos\theta$ এবং $\cos(n.360^\circ-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$.
$\tan(n.360^\circ+\theta)=\tan\theta$ এবং $\tan(n.360^\circ-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$.

$n=1$ হইলে,

$\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$, $\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$.
$\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$, $\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$.
$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$, $\tan(360^\circ-\theta)=-\tan\theta$.

18. n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা বা শূন্য হইলে ($n.90^\circ\pm\theta$) কোণসমূহের কোণানুপাত নির্ণয়।

n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে এইরূপ আর একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m পাওয়া যাইবে যে n কে $4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$ আকারের যে কোন একটির দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে।

(i) মনে কর, $n=4m$. তাহা হইলে,

$\sin(n.90^\circ+\theta)=\sin(4m.90^\circ+\theta)=\sin(m.360^\circ+\theta)=\sin\theta$.
$\cos(n\,90^\circ+\theta)=\cos(4m.90^\circ+\theta)=\cos(m.360^\circ+\theta)=\cos\theta$.
$\tan(n.90^\circ+\theta)=\tan(m.360^\circ+\theta)=\tan\theta$.

এবং $\sin(n.90^\circ-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$.
$\cos(n.90^\circ-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$.
$\tan(n.90^\circ-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$.

(ii) মনে কর $n=4m+1$, তাহা হইলে,

$\sin(n.90^\circ+\theta)=\sin(m.360^\circ+90^\circ+\theta)=\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$
$\cos(n.90^\circ+\theta)=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$.
$\tan(n.90^\circ+\theta)=\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta$.

এবং $\sin(n.90^\circ-\theta)=\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$.
$\cos(n.90^\circ-\theta)=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$.
$\tan(n.90^\circ-\theta)=\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$.

(iii) মনে কর, $n=4m+2$, তাহা হইলে,

$$\sin(n.90^\circ+\theta)=\sin(m.360^\circ+180^\circ+\theta)=\sin(180^\circ+\theta)$$
$$=-\sin\theta.$$

$$\sin(n.90^\circ-\theta)=\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta.$$
$$\cos(n.90^\circ+\theta)=\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta.$$
$$\cos(n.90^\circ-\theta)=\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta,$$ ইত্যাদি।

(iv) মনে কর, $n=4m+3$, তাহা হইলে,

$$\sin(n.90^\circ+\theta)=\sin(m.360^\circ+270^\circ+\theta)=\sin(270^\circ+\theta)$$
$$=-\cos\theta.$$

$$\sin(n.90^\circ-\theta)=\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta.$$
$$\cos(n.90^\circ+\theta)=\cos(270^\circ+\theta)=\sin\theta.$$
$$\cos(n.90^\circ-\theta)=\cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta,$$ ইত্যাদি।

19. কার্যকর নিয়ম (Working Rule):

উপরোক্ত অনুচ্ছেদগুলির লব্ধ ফলসমূহ সহজে মনে রাখিবার জন্য দুইটি নিয়ম লিপিবদ্ধ করা হইল : θ-এর যে কোন মানে,

(a) 90°-এর জোড় গুণিতকের সহিত + বা − চিহ্ন দ্বারা θ সংযুক্ত হইলে, কোণানুপাতগুলির নাম θ কোণের কোণানুপাতগুলির নামের সহিত অভিন্ন হইবে। কোণানুপাতগুলির চিহ্ন (sign) ঠিক করিবার জন্য θ-কে সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া সংযুক্ত কোণটি কোন পাদে অবস্থিত তাহা দেখিয়া "all, sin, tan, cos" নিয়মটি প্রয়োগ করিতে হইবে।

(b) 90°-এর বিজোড় গুণিতকের সহিত + বা − চিহ্ন দ্বারা θ সংযুক্ত হইলে কোণানুপাতগুলির নাম, θ কোণের অনুরূপ সহযোগী কোণানুপাতের নামে (Corresponding Co-function) পরিবর্তিত হইবে [অর্থাৎ sin পরিবর্তিত হইবে cos-এ, cos পরিবর্তিত হইবে sin-এ ; tan পরিবর্তিত হইবে cot-এ এবং cot পরিবর্তিত হইবে tan-এ]। চিহ্ন পূর্বের মত নিয়মে ঠিক করিতে হইবে।

টীকা : sine এবং cosine, tangent এবং cotangent, secant এবং cosecant অনুপাতগুলিকে পরস্পরের সহযোগী অপেক্ষক (Co-function) বলে।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. $\sin 120° = \sin(2\times 90° - 60°) = \sin 60°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

90° এর জোড় গুণিতকের সহিত 60° সংযুক্ত বলিয়া কোণানুপাতের নাম অপরিবর্তিত এবং 120° দ্বিতীয় পাদে বলিয়া চিহ্ন ধনাত্মক।

অথবা, $\sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

এখানে 90° এর বিজোড় গুণিতকের সহিত 30° সংযুক্ত বলিয়া প্রদত্ত কোণানুপাত 30° কোণের sin এর সহযোগী অনুপাত cos এ পরিবর্তিত হইতেছে।

$\cos 225° = \cos(3\times 90° - 45°) = -\sin 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

এইরূপে, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\tan 120° = -\sqrt{3}.$

$\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 135° = -1.$

$\sin 180° = \sin(2\times 90° + 0°) = \sin 0° = 0.$

$\cos 180° = \cos(180° + 0°) = -\cos 0° = -1.$

$\sin 270° = -\cos 0° = -1$, $\cos 270° = \sin 0° = 0.$

উদা. 2. মান নির্ণয় কর : (i) $\sin 330°$; (ii) $\cos 390°$; (iii) $\tan(-1560°)$; (iv) $\sec\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$.

(i) $\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}.$

(ii) $\cos 390° = \cos(360° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

(iii) $\tan(-1560°) = -\tan 1560°$ $[\because \tan(-\theta) = -\tan\theta]$

$$= -\tan(4.360° + 120°) = -\tan 120°$$

$$= -\tan(2\times 90° - 60°)$$

$$= -(-\tan 60°) = \sqrt{3}.$$

(iv) $\sec\left(-\frac{13\pi}{6}\right)=\sec\frac{13\pi}{6}$ [$\because$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$]

$$=\sec\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

উদা. 3. $\frac{25\pi}{6}$ এর সহিত একই অন্তিমবাহু বিশিষ্ট (Co-terminal) ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি নির্ণয় কর এবং $\operatorname{cosec}\frac{25\pi}{6}$ এর মান নির্ণয় কর।

$\frac{25\pi}{6}=4\pi+\frac{\pi}{6}$. $\therefore$ নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক (Co-terminal) কোণ $=\frac{\pi}{6}$;

$\therefore$ $\operatorname{cosec}\frac{25\pi}{6}=\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}=2.$

উদা. 4. দেখাও যে, $\cos A+\sin(270°+A)-\sin(270°-A)$
$+\cos(180°+A)=0.$ [H. S. '62 (Comp.)]

বামপক্ষ $=\cos A-\cos A-(-\cos A)-\cos A=\cos A-\cos A+\cos A$
$-\cos A=0.$

উদা. 5. মান নির্ণয় কর : $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}.$

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\cos\frac{5\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\cos\frac{7\pi}{8}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\frac{\pi}{8}.$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}$

$$=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=2.$$

উদা. 6. সমাধান কর : $\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$ যেখানে $0°<\theta<360°.$
[Pat. U. '42]

$\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$, or, $\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}=2$, or, $\frac{\tan^4\theta+1}{\tan^2\theta}=2$,

or, $\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1=0$, or, $(\tan^2\theta-1)^2=0$,

or, $\tan^2\theta-1=0$,

or, $\tan^2\theta=1$, $\therefore$ $\tan\theta=\pm1$.

যখন, $\tan\theta=1$, তখন, $\theta=45°$ এবং $225°$.

[$\because$ $\tan\theta=+1$, $\therefore$ θ প্রথম বা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হইবে।

$\because$ $\tan\theta=1=\tan 45°=\tan(180°+45°)$]

আবার, যখন $\tan\theta=-1$, তখন θ দ্বিতীয় বা চতুর্থ পাদে অবস্থিত হইবে।

$\therefore$ $\tan\theta=-1=-\tan 45°=\tan(180°-45°)=\tan 135°$;

$\therefore$ $\theta=135°$.

or, $\tan\theta=-1=-\tan 45°=\tan(360°-45°)=\tan 315°$;

$\therefore$ $\theta=315°$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta=45°, 135°, 225°, 315°$.

উদা. 7. দেখাও যে, $\cos(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cos\alpha$, n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

(1) মনে কর, n জোড় অখণ্ড সংখ্যা এবং মনে কর, $n=2m$ (m যে কোন অখণ্ড সংখ্যা বা 0)

$$\therefore \cos(n\pi+\alpha)=\cos(2m\pi+\alpha)=\cos(m.2\pi+\alpha)$$
$$=\cos(m.360°+\alpha)=\cos\alpha \quad [\text{ অনুঃ } 17]$$
$$=(-1)^{2m}\cos\alpha=(-1)^n\cos\alpha.$$

(2) আবার যদি, n বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা হয় তবে মনে কর, $n=2m+1$ (m যে কোন অখণ্ড সংখ্যা বা শূন্য)।

$$\cos(n\pi+\alpha)=\cos\{(2m+1)\pi+\alpha\}=\cos\{2m\pi+\pi+\alpha\}$$
$$=\cos\{m.360°+(180°+\alpha)\}=\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$=(-1)^{2m+1}\cos\alpha=(-1)^n\cos\alpha.$$

$\therefore$ $\cos(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cos\alpha$, n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদা. 8. যদি, A, B, C, D কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোণ হয় তবে দেখাও যে, $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=0$.

$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি $=2$ সমকোণ।

$\therefore$ $A+C=180°$ এবং $B+D=180°$.

$\because$ $A+C=180°$, $\therefore$ $A=180°-C$, $\therefore$ $\cos A=\cos(180°-C)$
$=-\cos C$.

$\because$ $B+D=180°$, $\therefore$ $B=180°-D$, $\therefore$ $\cos B=\cos(180°-D)$
$=-\cos D$.

$\therefore$ $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=\cos A+\cos B-\cos A$
$-\cos B=0$.

উদা. 9. দেখাও যে, $\sin x+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi+x)+\cdots\cdots$

n সংখ্যকপদ পর্যন্ত$=0$, যখন n জোড় ।

অথবা, $=\sin x$, যখন n বিজোড় ।

$\sin(\pi+x)=-\sin x,\quad \sin(2\pi+x)=\sin x,$

$\sin(3\pi+x)=\sin(2\pi+\pi+x)=\sin(\pi+x)=-\sin x,$

$\sin(4\pi+x)=\sin(2.2\pi+x)=\sin x,$

$\sin(5\pi+x)=\sin(2.2\pi+\pi+x)=\sin(\pi+x)=-\sin x$, ইত্যাদি

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি$=\sin x-\sin x+\sin x-\sin x+\cdots\cdots n$ সংখ্যকপদ পর্যন্ত ।

$=0$, যখন n জোড় ।

অথবা, $=\sin x$, যখন n বিজোড় ।

প্রশ্নমালা 3

1. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin 150°$, (ii) $\sin 225°$, (iii) $\tan 315°$, (iv) $\cot 135°$, (v) $\sin 360°$, (vi) $\cos 360°$.

2. ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক Co-terminal কোণ ও মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin 480°$, (ii) $\sec(-300°)$.

3. 45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকরূপে প্রকাশ কর :

(i) $\cos 220°$, (ii) $\tan(-1038°)$, (iii) $\operatorname{cosec} 920°$, (iv) $\sin\frac{73\pi}{9}$.

4. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin(-1035°)$, (ii) $\sec 1395°$, (iii) $\cot 870°$, (iv) $\cos(-480°)$, (v) $\tan 1110°$, (vi) $\operatorname{cosec}(-780°)$.

5. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin 330°+\tan 45°-4\sin^2 120°+2\cos^2 135°+\sec^2 180°$. [H. S. '61]

(ii) $\sin^2 60°+\cos^2 150°+\tan^2 120°+\cos 180°-\tan 135°$. [H. S. '60]

(iii) $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}$.

6. সরল কর :

$$\frac{\sin(2\pi+\theta)\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cos(-\theta)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\sin(2\pi-\theta)}.$$

7. দেখাও যে,

(i) $\sin(-470°) = -\cos 20°$; (ii) $\tan 115° = -\tan 65°$;

(iii) $\operatorname{cosec}\frac{1}{4}(\theta-2\pi) = -\sec\frac{\theta}{4}$.

8. দেখাও যে,

$\sin 135° \cos 65° + \cos 45° \cos 115° = 0.$ [S. F. '64]

9. যদি $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হয় তবে $\cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

10. $0° < \theta < 360°$ হইলে, সমাধান কর :

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$; (ii) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; (iii) $\sec\theta = -\sqrt{2}$.

11. সমাধান কর, যেখানে $0° \leq \theta \leq 360°$

(i) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0.$ [H. S. '60]

(ii) $\cos^2\theta - \sin\theta = \frac{1}{4}.$ [H. S. '62]

(iii) $4\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin\theta + 2\cos\theta.$ [C. U. '50]

(iv) $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta.$ [H. S. '64 Comp.]

12. n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা হইলে প্রমাণ কর :

(i) $\cos n\pi = (-1)^n$; (ii) $\tan\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;

(iii) $\sin\left\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

13. যদি $\cos 145° = -a$ হয় তবে দেখাও $\cot 305° = -\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$

14. A, B, C কোন ত্রিভুজের কোণত্রয় হইলে দেখাও যে,

(i) $\sin(A+B) = \sin C.$ (ii) $\tan(A+B) + \tan C = 0.$

(iii) $\sin(B+C) - \cos A = \cos(B+C) + \sin A.$ [S. F. '69]

(iv) $\sin(B+C-A) = \sin 2A.$

(v) $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}.$ (vi) $\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = \cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right).$

15. যদি A, B, C, D কোন চতুর্ভুজের কোণ সমূহ হয় তবে দেখাও যে,

(i) $\cos\frac{1}{2}(A+C) + \cos\frac{1}{2}(B+D) = 0.$

(ii) $\tan A + \tan(B+C+D) = 0.$

চতুর্থ অধ্যায়

মিশ্র কোণ (Compound Angles)

20. দুই বা তাহার চেয়ে বেশী কোণের বীজগণিতীয় সমষ্টিকে মিশ্র কোণ বলে। যেমন **A, B, C** দ্বারা কোণ প্রকাশ করিলে **A+B, A−B, A+B−C** প্রভৃতি কোণগুলিকে মিশ্র কোণ বলে।

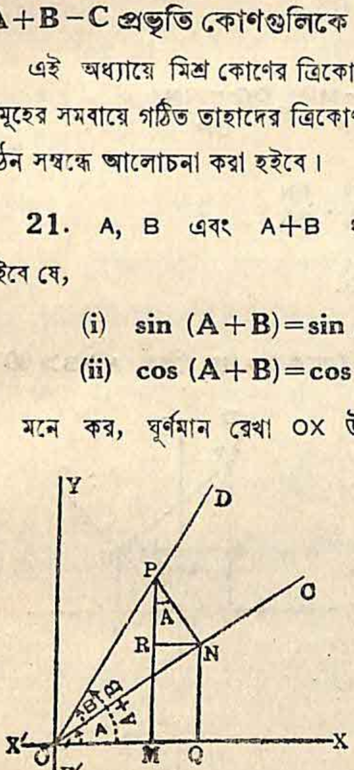
এই অধ্যায়ে মিশ্র কোণের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের মান, ঐ মিশ্রকোণ যে কোণ সমূহের সমবায়ে গঠিত তাহাদের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের মাধ্যমে নির্ণয় করিবার সূত্র গঠন সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে।

21. A, B এবং A+B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

(ii) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

মনে কর, ঘূর্ণমান রেখা OX উহার প্রাথমিক অবস্থান OX হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া A কোণের সমান ∠XOC উৎপন্ন করিল। পুনরায় উহা একই দিকে ঘুরিয়া B কোণের সমান ∠COD উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে ∠XOD=A+B.



চিত্র 19

অঙ্কন: A+B কোণের অন্তিম-বাহু OD এর উপর P যে কোন বিন্দু লও এবং P হইতে OX এবং OC এর উপর যথাক্রমে PM এবং PN লম্ব টান। আবার N বিন্দু হইতে OX ও PM এর উপর যথাক্রমে NQ ও NR লম্ব টান।

প্রমাণ: $\because$ $\angle RPN+\angle PNR=90°$,

$\therefore$ $\angle RPN=90°-\angle PNR=\angle RNO$

$=$ একান্তর $\angle NOQ=A.$

(i) সমকোণী ত্রিভুজ POM হইতে,

$$\sin (A+B)=\sin \angle POM=\frac{PM}{OP}=\frac{MR+PR}{OP}=\frac{QN+PR}{OP}$$

$$=\frac{QN}{OP}+\frac{PR}{OP}=\frac{QN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$=\sin A \cos B+\cos A \sin B.$$

(ii) সমকোণী ত্রিভুজ POM হইতে,

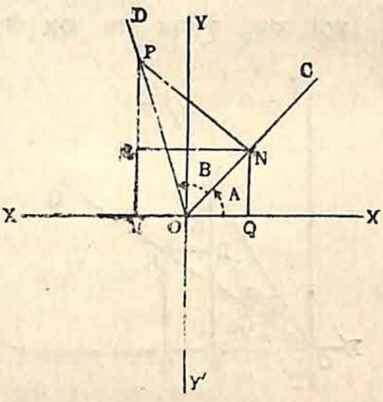
$$\cos (A+B)=\cos\angle POM=\frac{OM}{OP}=\frac{OQ-MQ}{OP}=\frac{OQ-RN}{OP}$$

$$=\frac{OQ}{OP}-\frac{RN}{OP}=\frac{OQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{RN}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$=\cos A \cos B-\sin A \sin B.$$

টীকা : (1) যদি A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয়, কিন্তু $A+B>90°$ কিন্তু $<180°$ হয় তবে চিত্রটি পার্শ্বের মত হইবে। এক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক নির্ণয় করিবার সময় ভুজ কোটির যথাযথ চিহ্নসহ বসাইতে হইবে।

বস্তুতঃ A ও B-এর পরিমাণ যাহাই হউক না কেন ঐ কোণগুলির পরিমাণ অনুযায়ী চিত্র আঁকিয়া ভুজ ও কোটির যথাযথ চিহ্নগুলি লইলে (i) ও (ii) সত্য বলিয়া প্রমাণিত হইবে।



চিত্র 20

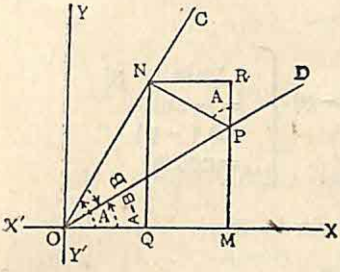
(2) উপরোক্ত দুইটি সূত্রকে Sine এবং Cosine-এর Addition Theorems বা Addition Formula বলা হয়।

22. A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A>B$ হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে,

(i) $\sin (A-B)=\sin A \cos B-\cos A \sin B.$

(ii) $\cos (A-B)=\cos A \cos B+\sin A \sin B.$

মনে কর, ঘূর্ণমান রেখা OX উহার প্রাথমিক অবস্থান OX হইতে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়া A কোণের সমান $\angle XOC$ উৎপন্ন করিল। পুনরায় উহা ঋণাত্মক দিকে ঘুরিয়া B কোণের সমান $\angle COD$ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে $\angle XOD = A - B$.



চিত্র 21

অঙ্কন ঃ এখন A−B কোণের অন্তিমবাহু OD-এর উপর যে কোন বিন্দু P লও এবং P হইতে OX ও OC-এর উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টান। আবার N হইতে OX ও MP-এর বর্ধিতাংশের উপর যথাক্রমে NQ ও NR লম্ব টান।

প্রমাণ ঃ $\because \angle RPN + \angle PNR = 90^\circ$.

$\therefore \angle RPN = 90^\circ - \angle PNR = \angle CNR =$ অনুরূপ $\angle NOQ = A$.

(i) সমকোণী ত্রিভুজ POM হইতে,

$$\sin (A-B) = \sin \angle POM = \frac{PM}{OP} = \frac{RM - RP}{OP} = \frac{NQ - RP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{OP} - \frac{RP}{OP} = \frac{NQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{RP}{PN} \cdot \frac{PN}{OP}$$

$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

(ii) সমকোণী ত্রিভুজ POM হইতে,

$$\cos (A-B) = \cos \angle POM = \frac{OM}{OP} = \frac{OQ + QM}{OP} = \frac{OQ + NR}{OP}$$

$$= \frac{OQ}{OP} + \frac{NR}{OP} = \frac{OQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{NR}{PN} \cdot \frac{PN}{OP}$$

$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

টীকা ঃ (1) উপরোক্ত সূত্র দুইটিকে Subtraction Theorems বা Subtraction Formulae বলা হয়।

(2) যেহেতু $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

এবং $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$,

এই সূত্র দুইটি A ও B যে কোন মানের জন্যই সত্য ; অতএব সূত্র দুইটিতে B এর স্থলে $-B$ বসাইয়া পাই,

$$\sin(A-B)=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B) = \sin A\cos B-\cos A\sin B. \quad \left[\begin{array}{l}\because \sin(-B) \\ = -\sin B \\ \cos(-B) \\ = \cos B\end{array}\right.$$

এবং $\cos(A-B)=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

সুতরাং $\sin(A+B)$ এবং $\cos(A+B)$ এর সূত্র হইতেও $\sin(A-B)$ এবং $\cos(A-B)$ এর সূত্র গঠন করা যায়।

প্রয়োগঃ 15° কোণের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের মান নির্ণয়।

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$$

দ্রষ্টব্য ঃ $\because\ 75^\circ=90^\circ-15^\circ,\ \therefore \sin 75^\circ=\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

এবং $\cos 75^\circ=\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

23. কতিপয় অনুসিদ্ধান্ত ঃ

প্রমাণ করিতে হইবে,

(1) $\mathbf{\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B}$

$$\mathbf{=\cos^2 B-\cos^2 A.}$$

(2) $\mathbf{\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B}$

$$\mathbf{=\cos^2 B-\sin^2 A.}$$

প্রমাণ : (1) বামপক্ষ $=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$

$$\times(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$

$$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$$

$$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$$

$$=\sin^2 A-\sin^2 B$$

$$=(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)=\cos^2 B-\cos^2 A.$$

(2) বামপক্ষ $=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$

$$\times(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$$

$$=\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B$$

$$=\cos^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\cos^2 A)\sin^2 B$$

$$=\cos^2 A-\sin^2 B$$

$$=1-\sin^2 A-(1-\cos^2 B)=\cos^2 B-\sin^2 A.$$

24. মিশ্র কোণের ট্যানজেণ্ট নির্ণয়।

প্রমাণ করিতে হইবে,

(1) $$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

(2) $$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

প্রমাণ : (1) $$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

[লব ও হরকে $\cos A\cos B$ দ্বারা ভাগ করিয়া। $\cos A\cos B$ দ্বারা ভাগক্রিয়া যুক্তিসিদ্ধ; যেহেতু $\cos A$ বা $\cos B$ এর কোনটিই শূন্য নয়। কারণ শূন্য হইলে $\tan A$ এবং $\tan B$ অনির্দিষ্ট হইয়া যায়।

(2) $$\tan(A-B)=\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

[পূর্বের মত লব ও হরকে $\cos A\cos B$ দ্বারা ভাগ করিয়া।

টীকা ঃ B এর স্থলে $-B$ বসাইয়া $\tan(A+B)$ এর সূত্র হইতে $\tan(A-B)$ এর সূত্র প্রমাণ করা যায়।

অনুসি. $\tan(45^\circ+A)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$,

এবং $\tan(45^\circ-A)=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$.

25. মিশ্র কোণের কোট্যানজেণ্ট নির্ণয়।

প্রমাণ করিতে হইবে,

(1) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$.

(2) $\cot(A-B=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$.

প্রমাণ ঃ (1) $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$

$$=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}$$ [লব ও হরকে $\sin A\sin B$ দ্বারা ভাগ করিয়া।]

$$=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$$

(2) $\cot(A-B)=\dfrac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}=\dfrac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}$

$$=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$ [$\sin A\sin B$ দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করিয়া।]

টীকা ঃ B এর স্থলে $-B$ বসাইয়া $\cot(A+B)$ এর সূত্র হইতে $\cot(A-B)$ এর সূত্র প্রমাণ করা যায়।

উদা. $\tan 75^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}.$$

26. (A+B+C) এর ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক সমূহ।

(i) $\sin(A+B+C)=\sin\{(A+B)+C\}$

$$=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$$

$$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C$$
$$+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C$$

$$=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B$$
$$-\sin A\sin B\sin C.$$

টীকা : $\sin(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C\,[\tan A+\tan B$
$+\tan C-\tan A\tan B\tan C\,]$,

এই আকারেও লেখা যায়, যদি $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ এর কোনটিই শূন্য না হয়।

(ii) $\cos(A+B+C)=\cos\{(A+B)+C\}=\cos(A+B)\cos C$
$-\sin(A+B)\sin C$

$$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\cos C$$
$$-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C$$

$$=\cos A\cos B\cos C-\cos C\sin B\sin A-\cos B\sin C\sin A$$
$$-\cos A\sin B\sin C$$

$$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\cos B\sin C\sin A$$
$$-\cos C\sin A\sin B.$$

টীকা : $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C\,[1-\tan B\tan C$
$-\tan C\tan A-\tan A\tan B\,]$,

এই আকারেও লেখা যায়, যদি $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ এর কোনটিই শূন্য না হয়।

(iii) $\tan(A+B+C)=\tan\{(A+B)+C\}=\dfrac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$

$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdot\tan C}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}.$$

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. যদি A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয় এবং $\sin A=\frac{3}{5}$ ও $\cos B=\frac{5}{13}$ হয় তবে $\sin(A-B)$ এর মান নির্ণয় কর।

$\sin A=\frac{3}{5}$, $\therefore$ $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$.

$\cos B=\frac{5}{13}$, $\therefore$ $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$.

$\therefore$ $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}$

$$=\frac{15}{65}-\frac{48}{65}=-\frac{33}{65}.$$

উদা. 2. দেখাও যে, $\dfrac{\cos 10°+\sin 10°}{\cos 10°-\sin 10°}=\tan 55°$.

দক্ষিণপক্ষ $=\tan 55°=\tan(45°+10°)=\dfrac{1+\tan 10°}{1-\tan 10°}$

$$=\frac{1+\dfrac{\sin 10°}{\cos 10°}}{1-\dfrac{\sin 10°}{\cos 10°}}=\frac{\cos 10°+\sin 10°}{\cos 10°-\sin 10°}.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর : $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$.

[B. H. U. '47, '56, H. S. '66 comp.]

প্রথম পদ $=\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}=\dfrac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B}$

$$=\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}$$

$$=\tan A-\tan B.$$

অনুরূপে, দ্বিতীয় পদ $=\tan B-\tan C$, এবং তৃতীয় পদ $=\tan C-\tan A$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=\tan A-\tan B+\tan B-\tan C+\tan C-\tan A=0$.

উদা. 4. দেখাও যে, $1+\tan 2\theta\tan\theta=\sec 2\theta$. [C. U. '51]

বামপক্ষ $=1+\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta}{\cos 2\theta\cos\theta}$

$$=\frac{\cos(2\theta-\theta)}{\cos 2\theta\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{\cos 2\theta\cos\theta}=\frac{1}{\cos 2\theta}=\sec 2\theta.$$

উদা. 5. দেখাও যে,

$$\cos^2 A+\cos^2\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}.$$ [C. U. '33]

বামপক্ষ $=\cos^2 A+\{\cos(A+60^\circ)\}^2+\{\cos(A-60^\circ)\}^2$

$=\cos^2 A+(\cos A\cos 60^\circ-\sin A\sin 60^\circ)^2$

$\qquad+(\cos A\cos 60^\circ+\sin A\sin 60^\circ)^2$

$=\cos^2 A+2\,.\,\cos^2 A\cos^2 60^\circ+2\sin^2 A\sin^2 60^\circ$

$=\cos^2 A+2\,.\,\cos^2 A\,.\,\frac{1}{4}+2\sin^2 A\,.\,\frac{3}{4}$

$=\cos^2 A+\frac{1}{2}\cos^2 A+\frac{3}{2}\sin^2 A$

$=\frac{3}{2}\cos^2 A+\frac{3}{2}\sin^2 A=\frac{3}{2}(\cos^2 A+\sin^2 A)=\frac{3}{2}.$

উদা. 6. যদি $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+1=0$ হয় তবে দেখাও যে, $1+\cot\alpha\tan\beta=0.$ [C. U. '39]

$\because\ \sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+1=0,$

$\therefore\ \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=1,$

or, $\cos(\alpha+\beta)=1,$

$\therefore\ \sin^2(\alpha+\beta)=1-\cos^2(\alpha+\beta)=1-1=0.$

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=0.$

$\therefore\ 1+\cot\alpha\tan\beta=1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$

$=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$

$=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}=0.$

উদা. 7. যদি $A+B+C=\pi$ এবং $\cos A=\cos B\cos C$ হয় তবে দেখাও যে, $\tan A=\tan B+\tan C.$ [C. U. '42, '56]

দক্ষিণপক্ষ $=\tan B+\tan C=\dfrac{\sin B}{\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}$

$=\dfrac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}=\dfrac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}$

$=\dfrac{\sin(\pi-A)}{\cos A}$ [$\because\ A+B+C=\pi$ এবং $\cos B\cos C=\cos A$]

$=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\tan A.$

উদা. 8. যদি $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)=-\frac{3}{2}$ হয় তবে দেখাও যে, $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ এবং $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$.

$\because\ \cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)=-\frac{3}{2}$,

$\therefore\ 2\cos(\alpha-\beta)+2\cos(\beta-\gamma)+2\cos(\gamma-\alpha)+3=0$,

or, $1+1+1+2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta+2\cos\beta\cos\gamma$
$+2\sin\beta\sin\gamma+2\cos\gamma\cos\alpha+2\sin\gamma\sin\alpha=0$,

or, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta+\sin^2\gamma+\cos^2\gamma$
$+2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta+2\cos\beta\cos\gamma$
$+2\sin\beta\sin\gamma+2\cos\gamma\cos\alpha+2\sin\gamma\sin\alpha=0$,

or, $(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta+2\sin\beta\sin\gamma$
$+2\sin\gamma\sin\alpha)+(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta$
$+2\cos\beta\cos\gamma+2\cos\gamma\cos\alpha)=0$,

or, $(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2=0$.

এখন দুইটি বাস্তব রাশির বর্গের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে না, যদি না উহাদের প্রত্যেকটি পৃথক ভাবে শূন্য হয়।

$\therefore\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ এবং, $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$.

উদা. 9. যদি θ কোণকে দুই অংশে বিভক্ত করায় ঐ অংশদ্বয়ের tangent এর অনুপাত K হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ঐ অংশদ্বয়ের অন্তর ϕ এমন একটি কোণ

যেখানে $\sin\phi=\frac{1-K}{1+K}\sin\theta$. [A. U. '42, '45]

মনে কর, প্রদত্ত কোণ θ এর অংশদ্বয় A ও B ;

$\therefore$ সর্তানুযায়ী, $\frac{\tan A}{\tan B}=K$.

এখন, $$\frac{1-K}{1+K}\sin\theta=\frac{1-\frac{\tan A}{\tan B}}{1+\frac{\tan A}{\tan B}}\sin\theta=\frac{\tan B-\tan A}{\tan B+\tan A}\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{\frac{\sin B}{\cos B}-\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin A}{\cos A}}\cdot\sin(A+B) \quad [\because\ \theta=A+B$$

$$=\frac{\sin B\cos A-\cos B\sin A}{\sin B\cos A+\cos B\sin A}\cdot\sin(A+B)$$

$$=\frac{\sin(B-A)}{\sin(A+B)}\cdot\sin(A+B)$$

$$=\sin(B-A)=\sin\phi.$$

প্রশ্নমালা 4

1. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin(-15°)$; (ii) $\cos 75°$; (iii) $\tan 105°$.

2. মান নির্ণয় কর :

$\cos 48° 20' \cos 11° 40' - \cos 41° 40' \cos 78° 20'$.

3. (i) যদি A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin A = \frac{4}{5}$ ও $\cos B = \frac{12}{13}$ হয় তবে $\cos(A-B)$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $\tan A = \frac{3}{4}$ এবং $\sin B = \frac{12}{13}$ হইলে এবং A তৃতীয় পাদে ও B দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত হইলে $\tan(A+B)$ এর মান নির্ণয় কর।

4. $\sin(A+B-C)$ কে A, B, C এর ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

প্রমাণ কর :—(5 হইতে 29)

5. $\sin(45°+A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A + \sin A)$.

6. $\cos(60°+A) = \frac{1}{2}(\cos A - \sqrt{3}\sin A)$. [A. U. '51]

7. $\tan(45°-A) = \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A}$.

8. $\cos 5\theta \cos 2\theta + \sin 5\theta \sin 2\theta = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$.

9. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \cos(\theta+\alpha)$.

10. $\frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B$.

11. $\frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)} = \tan A$.

12. $(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)^2 + (\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)^2 = 1$.

13. $\sin A \sin(B-C) + \sin B \sin(C-A) + \sin C \sin(A-B) = 0$.

14. $\frac{\sin(A+B)}{\cos(A-B)} = \frac{\tan A + \tan B}{1+\tan A \tan B}$.

15. $\sec(\theta+\alpha) = \frac{\sec\theta \sec\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha}$.

16. $\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$. [C. U. '44]

17. $\cot(45°+A)\cot(45°-A)=1$. [A. U. '59]

18. $\tan\theta\tan(\theta+60°)+\tan\theta\tan(\theta-60°)$

$+\tan(\theta+60°)\tan(\theta-60°)=-3$.

19. $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A$. [C. U. '47]

20. $\cos A+\cos(120°+A)+\cos(120°-A)=0$. [C. U. '53]

21. $\dfrac{\cos 7°+\sin 7°}{\cos 7°-\sin 7°}=\tan 52°$.

22. $\cos\dfrac{\phi-\theta}{2}-\sin\theta\sin\dfrac{\phi+\theta}{2}=\cos\theta\cos\dfrac{\phi+\theta}{2}$. [C. U. '50]

23. $\dfrac{\tan(2\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(2\alpha-\beta)\tan\beta}=\tan 2\alpha$.

24. $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}=0$. [B. H. U. '42]

25. $\dfrac{\sin(A-C)+2\sin A+\sin(A+C)}{\sin(B-C)+2\sin B+\sin(B+C)}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$. [A. U. '53]

26. $\sin(A+B)\sin(A-B)+\sin(B+C)\sin(B-C)$

$+\sin(C+A)\sin(C-A)=0$.

27. $\dfrac{\sin(B+C)}{\sin(C-A)\sin(A-B)}+\dfrac{\sin(C+A)}{\sin(A-B)\sin(B-C)}$

$+\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(B-C)\sin(C-A)}=0$. [G. U. '59]

28. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{A}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin A$. [A. U. '61]

29. $\sin^2 A+\sin^2(A-B)-2\sin A\cos B\sin(A-B)=\sin^2 B$.

[Bom. U. '34]

30. যদি, $A+B+C=\pi$ এবং $\cos A=\cos B\cos C$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot B\cot C=\frac{1}{2}$.

[C. U. '33]

31. যদি, $\tan \beta = \dfrac{n \sin \alpha \cos \alpha}{1 - n \sin^2 \alpha}$ হয় তবে দেখাও যে,

$$\tan (\alpha - \beta) = (1 - n) \tan \alpha. \quad \text{[Pat. U. '50]}$$

32. যদি, $\cos (A+B) \sin (C+D) = \cos (A-B) \sin (C-D)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot A \cot B \cot C = \cot D$. [C. U. '30]

33. যদি, কোন কোণ θ-কে এমন দুইটি অংশ α ও β-তে বিভক্ত করা হয় যেন $\tan \alpha : \tan \beta = m : n$ হয় তবে দেখাও যে, $\sin (\alpha - \beta) = \dfrac{m-n}{m+n} \sin \theta$.

34. যদি, $2 \tan \beta + \cot \beta = \tan \alpha$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\cot \beta = 2 \tan (\alpha - \beta). \quad \text{[A. U. '35]}$$

35. যদি, $x \sin (\theta + \alpha) = y \sin (\theta + \beta)$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\tan \theta = \frac{y \sin \beta - x \sin \alpha}{x \cos \alpha - y \cos \beta}.$$

36. যদি, $\sin (\theta + \alpha) = n \sin (\theta - \alpha)$ হয়, $(n \neq -1)$ তবে দেখাও যে,

$$\cot \theta = \frac{n-1}{n+1} \cot \alpha.$$

পঞ্চম অধ্যায়

রূপান্তরের সূত্র সমূহ [Transformation Formulae]

এই অধ্যায়ে দুইটি সাইন বা দুইটি কোসাইন বা একটি সাইন ও একটি কোসাইনের গুণফলকে যোগফল বা বিয়োগফলে এবং বিপরীতক্রমে যোগফল বা বিয়োগফলকে গুণফলে রূপান্তরের সূত্র গঠন করা হইবে।

27. গুণফলকে যোগফল বা বিয়োগফলে রূপান্তর (Transformation of products into sums or differences)।

আমরা পূর্ব অধ্যায়ে দেখিয়াছি,

$$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A+B) \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin (A-B) \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A+B) \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos (A-B) \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই,

$$\mathbf{2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)} \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\mathbf{2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)} \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

(3) ও (4) যোগ করিয়া পাই,

$$\mathbf{2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)} \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

(4) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\mathbf{2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)} \cdots \quad \cdots \quad (iv)$$

28. যোগফল বা বিয়োগফলকে গুণফলে রূপান্তর (Transformation of sums or differences into products)।

মনে কর $A+B=C$ এবং $A-B=D$,

তাহা হইলে, $A=\frac{C+D}{2}$ এবং $B=\frac{C-D}{2}$

এই মান অনুঃ 27 এর (i), (ii), (iii) ও (iv) এ বসাইয়া পাই,

$$\mathbf{\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}} \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (v)$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(vi)}$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(vii)}$$

$$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(viii)}$$

এই সূত্র চারিটিকে ভাষায় প্রকাশ করিয়া এইভাবে মনে রাখা সুবিধাজনক :

Sum of two sines = 2 sin (half sum) cos (half diff.)
Diff. of two sines = 2 cos (half sum) sin (half diff.)
Sum of two cosines = 2 cos (half sum) cos (half diff.)
Diff. of two cosines = 2 sin (half sum) sin (half diff. reversed)

টীকা : সূত্র (iv) ও (viii) বিশেষভাবে লক্ষ্য করা আবশ্যক।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. $\cos 4\theta \cos\theta$ কে যোগফলরূপে প্রকাশ কর।

$$\cos 4\theta \cos\theta = \tfrac{1}{2} . 2\cos 4\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\{\cos(4\theta+\theta)+\cos(4\theta-\theta)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\cos 5\theta + \cos 3\theta).$$

উদা. 2. $\cos 8\theta - \cos 5\theta$ কে গুণফলরূপে প্রকাশ কর।

$$\cos 8\theta - \cos 5\theta = 2\sin\frac{8\theta+5\theta}{2}\sin\frac{5\theta-8\theta}{2}$$
$$= 2\sin\frac{13\theta}{2}\sin\left(-\frac{3\theta}{2}\right)$$
$$= -2\sin\frac{13\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}. \quad \left[\because \sin\left(-\frac{3\theta}{2}\right) = -\sin\frac{3\theta}{2}.\right]$$

উদা. 3. প্রমাণ কর : $\sin 65° + \cos 65° = \sqrt{2}\cos 20°$.

[B. H. U. '53]

বামপক্ষ $= \sin 65° + \cos 65° = \sin(90° - 25°) + \cos 65°$

$$= \cos 25° + \cos 65° = 2\cos\frac{65°+25°}{2}\cos\frac{65°-25°}{2}$$
$$= 2\cos 45°\cos 20° = 2.\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 20° = \sqrt{2}\cos 20°.$$

অথবা, বামপক্ষ $= \sin 65° + \cos 65° = \sin 65° + \cos (90° - 25°)$

$$= \sin 65° + \sin 25° = 2 \sin \frac{65° + 25°}{2} \cos \frac{65° - 25°}{2}$$

$$= 2 \sin 45° \cos 20° = \sqrt{2} \cos 20°.$$

টীকা: যোগফলকে গুণফলে রূপান্তরিত করিতে হইলে যোগফলের উভয় পদকেই সাইন বা উভয়পদকেই কোসাইন রূপে প্রকাশ করিতে হইবে।

উদা. 4. দেখাও যে, $\cos 55° + \cos 65° + \cos 175° = 0.$

[C. U. 1876]

বামপক্ষ $= \cos 55° + \cos 65° + \cos 175°$

$$= 2 \cos \frac{65° + 55°}{2} \cos \frac{65° - 55°}{2} + \cos 175°$$

$$= 2 . \cos 60° \cos 5° + \cos 175°$$

$$= 2 . \tfrac{1}{2} \cos 5° + \cos 175° = \cos 5° + \cos 175°$$

$$= 2 \cos \frac{175° + 5°}{2} \cos \frac{175° - 5°}{2}$$

$$= 2 \cos 90° \cos 85° = 0 \quad [\because \cos 90° = 0]$$

অথবা, $\cos 5° + \cos 175° = \cos 5° + \cos (180° - 5°)$

$$= \cos 5° - \cos 5° = 0.$$

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}.$

[Pat. U. '42]

বামপক্ষ $= \sin 20° \sin 40° . \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 80°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \tfrac{1}{2}(2 \sin 20° \sin 40°) \sin 80°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \{\cos (40° - 20°) - \cos (40° + 20°)\} \sin 80°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (\cos 20° - \cos 60°) \sin 80°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 80° \cos 20° - \frac{\sqrt{3}}{4} . \tfrac{1}{2} . \sin 80°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} . 2 \sin 80° \cos 20° - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 80°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\{\sin(80°+20°)+\sin(80°-20°)\}-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 100°+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 60°-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\sin(180°-80°)+\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80°+\frac{3}{16}-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80°=\frac{3}{16}.$$

উদা. 6. প্রমাণ কর, $\dfrac{\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\sin 7\theta}{\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta}=\tan 4\theta.$

[A. U. '48]

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{(\sin\theta+\sin 7\theta)+(\sin 3\theta+\sin 5\theta)}{(\cos\theta+\cos 7\theta)+(\cos 3\theta+\cos 5\theta)}$$

$$=\frac{2\sin 4\theta\cos 3\theta+2\sin 4\theta\cos\theta}{2\cos 4\theta\cos 3\theta+2\cos 4\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin 4\theta(\cos 3\theta+\cos\theta)}{2\cos 4\theta(\cos 3\theta+\cos\theta)}=\tan 4\theta.$$

উদা. 7. $\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$ কে তিনটি কোসাইনের গুণফলরূপে প্রকাশ কর। [A. U. '45]

$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$$

$$=(\cos A+\cos B)+\{\cos C+\cos(A+B+C)\}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B+2C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B+2C}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot 2\cos\frac{A+B+2C+A-B}{4}\cdot\cos\frac{A+B+2C-A+B}{4}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot 2\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}.$$

উদা. 8. যদি $\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot A\cot B\cot C=\cot D$. [C. U. '30]

$\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$,

or, $\dfrac{\sin(C+D)}{\sin(C-D)}=\dfrac{\cos(A-B)}{\cos(A+B)}$,

or, $\dfrac{\sin(C+D)+\sin(C-D)}{\sin(C+D)-\sin(C-D)}=\dfrac{\cos(A-B)+\cos(A+B)}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}$,

[By Comp. & Divi.]

or, $\dfrac{2\sin C\cos D}{2\cos C\sin D}=\dfrac{2\cos A\cos B}{2\sin A\sin B}$,

or, $\tan C\cot D=\cot A\cot B$,

or, $\cot A\cot B=\dfrac{1}{\cot C}\cdot\cot D$

$\therefore\ \cot A\cot B\cot C=\cot D$.

উদা. 9. যদি $\sin\theta+\sin\phi=a$ এবং $\cos\theta+\cos\phi=b$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\tan\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$ [C. U. '40]

$\because\ \sin\theta+\sin\phi=a,\quad\therefore\ 2\sin\dfrac{\theta+\phi}{2}\cos\dfrac{\theta-\phi}{2}=a\cdots\cdots$ (1)

$\because\ \cos\theta+\cos\phi=b,\quad\therefore\ 2\cos\dfrac{\theta+\phi}{2}\cos\dfrac{\theta-\phi}{2}=b\cdots\cdots$ (2)

(1) ও (2) বর্গ করিয়া এবং যোগ করিয়া পাই,

$$4\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}\left(\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}+\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}\right)=a^2+b^2$$

or, $4\cos^2\dfrac{\theta-\phi}{2}=a^2+b^2,\quad\therefore\ \cos^2\dfrac{\theta-\phi}{2}=\dfrac{a^2+b^2}{4}\cdots\cdots$ (3)

$\therefore\ \sin^2\dfrac{\theta-\phi}{2}=1-\cos^2\dfrac{\theta-\phi}{2}=1-\dfrac{a^2+b^2}{4}=\dfrac{4-a^2-b^2}{4}.\cdots$ (4)

(4) কে (3) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\tan^2\frac{\theta-\phi}{2}=\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

$$\therefore\ \tan\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$

উদা. 10. যদি, $\frac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\frac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\frac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0.$

[Pat. U. '45]

$\because \quad \frac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\frac{y}{\tan(\theta+\beta)}, \quad \therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)},$

or, $\frac{x}{y}=\frac{\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}}{\frac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}=\frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)}{\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)},$

or, $\frac{x+y}{x-y}=\frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)+\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)-\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)},$

[By Comp. & Divi.]

or, $\frac{x+y}{x-y}=\frac{\sin(\theta+\alpha+\theta+\beta)}{\sin(\theta+\alpha-\theta-\beta)}=\frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},$

$\therefore \quad \frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)=\sin(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=\frac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\beta)-\cos(2\theta+2\alpha)\}.$

অনুরূপে, $\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)=\frac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\gamma)-\cos(2\theta+2\beta)\}$

এবং, $\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=\frac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\alpha)-\cos(2\theta+2\gamma)\}.$

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $=\frac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\beta)-\cos(2\theta+2\alpha)+\cos(2\theta+2\gamma)$
$-\cos(2\theta+2\beta)+\cos(2\theta+2\alpha)-\cos(2\theta+2\gamma)\}=0.$

প্রশ্নমালা 5

1. যোগফল বা বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর : (Express as a sum or difference) :

(i) $2\sin 5\theta\cos 3\theta$, (ii) $2\sin 7\theta\sin 3\theta$,
(iii) $\sin 3\theta\cos\theta$, (iv) $\cos 25^\circ\cos 15^\circ$.

2. গুণফলরূপে প্রকাশ কর [Express as a product] :

(i) $\sin 5\theta + \sin \theta$, (ii) $\cos 3\theta - \cos 7\theta$,

(iii) $\sin 3\theta + \cos \theta$, (iv) $\cos 55° + \sin 55°$.

প্রমাণ কর : [3 হইতে 17]

3. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \tan \dfrac{A+B}{2} \cot \dfrac{A-B}{2}$. [A. U. '59]

4. $\dfrac{\cos A + \cos B}{\cos B - \cos A} = \cot \dfrac{A+B}{2} \cot \dfrac{A-B}{2}$. [A. U. '57]

5. $\dfrac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2B + \sin 2A} = \tan (A-B)$. [A.U. '62]

6. $\dfrac{\cos 2B + \cos 2A}{\cos 2B - \cos 2A} = \cot (A+B) \cot (A-B)$. [C.U. '50]

7. $\dfrac{\cos 9° - \sin 9°}{\cos 9° + \sin 9°} = \tan 36°$.

8. $\cos A + \cos (120° + A) + \cos (120° - A) = 0$. [C.U. '53]

9. $\sin 20° + \sin 40° - \sin 80° = 0$.

10. $\sin 10° + \sin 20° + \sin 40° + \sin 50° = \sin 70° + \sin 80°$. [B.H.U. '48]

11. $\dfrac{\sin 7\alpha - \sin 5\alpha - \sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 7\alpha - \cos 5\alpha + \cos 3\alpha - \cos \alpha} = \tan 2\alpha$.

12. $\dfrac{\sin A \sin 2A + \sin 2A \sin 5A}{\sin A \cos 2A + \sin 2A \cos 5A} = \tan 5A$. [C.U. 1870]

13. $\dfrac{\sin 11A \sin A + \sin 7A \sin 3A}{\cos 11A \sin A + \cos 7A \sin 3A} = \tan 8A$. [Pat. U. '12]

14. (i) $\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° = \frac{1}{16}$. [B.H.U. '52]

(ii) $4 \sin 23° \sin 37° \sin 83° = \cos 21°$. [M.U. 1896]

15. (i) $4 \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \sin 3\theta$.

(ii) $\cos \theta \cos (60° + \theta) \cos (60° - \theta) = \frac{1}{4} \cos 3\theta$. [B.H.U. '51]

(iii) $2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} = 0$. [A. U. '52]

16. $\cos 2A+\cos 4A+\cos 6A+\cos 8A$

$$=4\cos A\cos 2A\cos 5A.$$ [C. U. 1887]

17. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$ [C. U. '62]

18. $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)$

$-\sin(A+B+C)$ কে তিনটি সাইনের গুণফলরূপে প্রকাশ কর।

19. $4\cos A\cos B\cos C$ কে চারিটি কোসাইনের যোগফলরূপে প্রকাশ কর।

20. যদি, $\sin\theta+\sin\phi=a$ এবং $\cos\theta+\cos\phi=b$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,

$$\tan\frac{\theta+\phi}{2}=\frac{a}{b}.$$

21. প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n=2\cot^n\frac{A-B}{2},$$ যখন n যুগ্ম ;

অথবা $=0$, যখন, n অযুগ্ম। [Pat. U. '33]

22. যদি $\sin\theta=n\sin(\theta+2\alpha)$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{1+n}{1-n}\tan\alpha.$$

23. যদি, α, β, γ-সমান্তর প্রগতিতে থাকে তবে প্রমাণ কর যে,

$$\cot\beta=\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}.$$

24. $a\cos x+b\sin x=c$ এবং $a\sin y+b\sin y=c$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{a}{\cos\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{b}{\sin\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{c}{\cos\frac{1}{2}(x-y)}.$$

ষষ্ঠ অধ্যায়

গুণিতক কোণের কোণানুপাত

(Trigonometric Functions of Multiple Angles)

2A, 3A, 4A ইত্যাদি কোণগুলিকে A কোণের গুণিতক কোণ বলে।

29. 2A কোণের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক।

আমরা জানি, A ও B-এর যে কোন মানের জন্য,

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

সূত্র দুইটিতে B=A বসাইয়া পাই,

$$\sin 2A=2\sin A\cos A.$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)$$

$$=2\cos^2 A-1 \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

$$=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A=1-2\sin^2 A \quad \cdots \quad \cdots(2)$$

(1) ও (2) হইতে পক্ষান্তর করিয়া পাই,

$$1+\cos 2A=2\cos^2 A \quad \cdots \quad \cdots(3)$$

$$1-\cos 2A=2\sin^2 A \quad \cdots \quad \cdots(4)$$

(4) কে (3) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A \quad \cdots \quad \cdots(5)$$

টীকা : (1) হইতে (5) নং সূত্র যখন যেরূপ প্রয়োজন সেইরূপ ব্যবহার করিতে হইবে।

$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$, এই সূত্রে B=A বসাইয়া পাই,

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

আবার, $\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$, এই সূত্রে B=A বসাইয়া পাই,

$$\cot 2A=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$$

30. sin 2A এবং cos 2A কে tan A এর মাধ্যমে প্রকাশ (To express sin 2A and cos 2A in terms of tan A)।

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A+\sin^2 A} = \frac{\dfrac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\therefore\ \mathbf{\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$ [লব ও হরকে $\cos^2 A$ দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\therefore\ \mathbf{\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}}.$$

31. 3A কোণের কোণানুপাত।

(1) $\sin 3A = \sin(2A+A) = \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A$

$= 2\sin A\cos A\,.\,\cos A + (1-2\sin^2 A)\sin A$

$= 2\sin A\cos^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A$

$= 2\sin A(1-\sin^2 A) + (1-2\sin^2 A)\sin A$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A.$

$$\therefore\ \mathbf{\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A.}$$

টীকা ঃ $\sin 3A$-কে $\sin A$-র মাধ্যমে প্রকাশ করিবার জন্য $\cos^2 A = 1-\sin^2 A$ এবং $\cos 2A = 1-2\sin^2 A$ লওয়া হইয়াছে।

(2) $\cos 3A = \cos(2A+A) = \cos 2A\cos A - \sin 2A\sin A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A\sin A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2(1-\cos^2 A)\cos A$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A.$

$$\therefore\ \mathbf{\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.}$$

টীকা : cos 3A-কে cos A-র মাধ্যমে প্রকাশ করিবার জন্য $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ এবং $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ লওয়া হইয়াছে।

(3) $\tan 3A = \tan(2A + A) = \dfrac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} . \tan A} = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$\therefore \ \mathbf{\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}}.$$

টীকা : $\tan(A+B+C) = \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}$

এই সূত্রে, $B = A$ এবং $C = A$ বসাইয়াও tan 3A-র সূত্রটি পাওয়া যায়।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. cos 5A-কে cos A-র মাধ্যমে প্রকাশ কর। [C. U. '31]

$\cos 5A = \cos(3A + 2A) = \cos 3A \cos 2A - \sin 3A \sin 2A$

$$= (4\cos^3 A - 3\cos A)(2\cos^2 A - 1)$$
$$\quad - (3\sin A - 4\sin^3 A) . 2\sin A \cos A$$
$$= (8\cos^5 A - 10\cos^3 A + 3\cos A)$$
$$\quad - (3 - 4\sin^2 A) . 2\sin^2 A \cos A$$
$$= (8\cos^5 A - 10\cos^3 A + 3\cos A)$$
$$\quad - \{3 - 4(1 - \cos^2 A)\} . 2(1 - \cos^2 A)\cos A$$
$$= (8\cos^5 A - 10\cos^3 A + 3\cos A)$$
$$\quad - (4\cos^2 A - 1)(1 - \cos^2 A) . 2\cos A$$
$$= (8\cos^5 A - 10\cos^3 A + 3\cos A)$$
$$\quad - (5\cos^2 A - 4\cos^4 A - 1) . 2\cos A$$
$$= 8\cos^5 A - 10\cos^3 A + 3\cos A - 10\cos^3 A$$
$$\qquad + 8\cos^5 A + 2\cos A$$
$$= 16\cos^5 A - 20\cos^3 A + 5\cos A.$$

উদা. 2. দেখাও যে, $\dfrac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}$. [B. H. U. '47, '54, '59]

$$\text{বামপক্ষ}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos 8A}-1}{\dfrac{1}{\cos 4A}-1}=\dfrac{1-\cos 8A}{\cos 8A}\cdot\dfrac{\cos 4A}{1-\cos 4A}$$

$$=\dfrac{2\sin^2 4A}{\cos 8A}\cdot\dfrac{\cos 4A}{2\sin^2 2A} \qquad \text{[অনু: 29, সূত্র (4)]}$$

$$=\dfrac{2\sin 4A\cos 4A\cdot\sin 4A}{\cos 8A\cdot 2\sin^2 2A}=\dfrac{\sin 8A}{\cos 8A}\cdot\dfrac{2\sin 2A\cos 2A}{2\sin^2 2A}$$

$$=\tan 8A\cdot\cot 2A=\dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, $\cos^2(A-120^\circ)+\cos^2(A+120^\circ)+\cos^2 A=\frac{3}{2}$.

[C. U. '33]

$$\text{বামপক্ষ}=\tfrac{1}{2}\{2\cos^2(A-120^\circ)+2\cos^2(A+120^\circ)+2\cos^2 A\}$$

$$=\tfrac{1}{2}[\{1+\cos 2(A-120^\circ)\}+\{1+\cos 2(A+120^\circ)\}+\{1+\cos 2A\}] \qquad \text{[অনু: 29, সূত্র 3]}$$

$$=\tfrac{1}{2}[3+\{\cos(2A-240^\circ)+\cos(2A+240^\circ)\}+\cos 2A]$$

$$=\tfrac{1}{2}[3+2\cdot\cos 240^\circ\cdot\cos 2A+\cos 2A]$$

$$=\tfrac{1}{2}[3+2(-\tfrac{1}{2})\cos 2A+\cos 2A]=\tfrac{3}{2}.$$

উদা. 4. দেখাও যে, $\cos^3 A\cos 3A+\sin^3 A\sin 3A=\cos^3 2A$.

[Pat. U. '39,' 43]

$$\text{বামপক্ষ}=(\tfrac{1}{4}\cos 3A+\tfrac{3}{4}\cos A)\cos 3A+(\tfrac{3}{4}\sin A-\tfrac{1}{4}\sin 3A)\sin 3A$$

[$\because \cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$, $\therefore \cos^3 A=\frac{1}{4}\cos 3A+\frac{3}{4}\cos A$
এবং $\because \sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$, $\therefore \sin^3 A=\frac{3}{4}\sin A-\frac{1}{4}\sin 3A$]

$$=\tfrac{1}{4}(\cos^2 3A-\sin^2 3A)+\tfrac{3}{4}(\cos 3A\cos A+\sin 3A\sin A)$$

$$=\tfrac{1}{4}\cos 6A+\tfrac{3}{4}\cos(3A-A)=\tfrac{1}{4}\cos 6A+\tfrac{3}{4}\cos 2A$$

$$=\tfrac{1}{4}\cdot\cos 3(2A)+\tfrac{3}{4}\cos 2A=\tfrac{1}{4}(4\cos^3 2A-3\cos 2A)+\tfrac{3}{4}\cos 2A$$

$$=\cos^3 2A-\tfrac{3}{4}\cos 2A+\tfrac{3}{4}\cos 2A=\cos^3 2A.$$

উদা. 5. দেখাও যে, $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}=1.$

[B. H. U. '55]

$$16\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}$$

$$=8\left(2\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\right)\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}$$

$$=8\,.\,\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\,.\,\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}$$

$$=4.\left(2\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\right)\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}$$

$$=4\sin\frac{8\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}=2\sin\frac{16\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}$$

$$=\sin 2\pi+\sin\frac{2\pi}{15}=\sin\frac{2\pi}{15}$$

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $=\dfrac{\sin\frac{2\pi}{15}}{\sin\frac{2\pi}{15}}=1.$

উদা. 6. দেখাও যে, $\tan 7A-\tan 4A-\tan 3A$
$=\tan 7A\tan 4A\tan 3A.$ [B. H. U. '49]

বামপক্ষ $=\tan(4A+3A)-(\tan 4A+\tan 3A)$

$$=\frac{\tan 4A+\tan 3A}{1-\tan 4A\tan 3A}-(\tan 4A+\tan 3A)$$

$$=(\tan 4A+\tan 3A)\left(\frac{1}{1-\tan 4A\tan 3A}-1\right)$$

$$=(\tan 4A+\tan 3A)\left(\frac{\tan 4A\tan 3A}{1-\tan 4A\tan 3A}\right)$$

$$=\frac{\tan 4A+\tan 3A}{1-\tan 4A\tan 3A}\,.\,(\tan 4A\tan 3A)$$

$$=\tan 7A\tan 4A\tan 3A.$$

উদা. 7. যদি $\tan\theta = \cos 2\alpha$ হয় তবে দেখাও যে $\sin 2\theta = \frac{1-\tan^4\alpha}{1+\tan^4\alpha}$.

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\cos 2\alpha}{1+\cos^2 2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{1+\left(\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2(1-\tan^2\alpha)}{1+\tan^2\alpha}}{\frac{2(1+\tan^4\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)^2}} = \frac{2(1-\tan^2\alpha)}{1+\tan^2\alpha} \times \frac{(1+\tan^2\alpha)^2}{2(1+\tan^4\alpha)} = \frac{1-\tan^4\alpha}{1+\tan^4\alpha}.$$

উদা. 8. যদি α ও β সূক্ষ্মকোণ এবং $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3-\cos 2\beta}$ হয় তবে দেখাও যে, $\tan\alpha = \sqrt{2}\tan\beta$. [C. U. '41]

$$\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3-\cos 2\beta}, \text{ or, } \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{3-\cos 2\beta}{3\cos 2\beta - 1},$$

$$\text{or, } \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{3-\cos 2\beta - 3\cos 2\beta + 1}{3-\cos 2\beta + 3\cos 2\beta - 1},$$

$$\text{or, } \tan^2\alpha = \frac{2(1-\cos 2\beta)}{(1+\cos 2\beta)} = 2\tan^2\beta$$ [অনু 29. সূত্র 5]

$\therefore\ \tan\alpha = \sqrt{2}\tan\beta.$ [$\because$ α ও β উভয়ই সূক্ষ্মকোণ]

উদা. 9. যদি $2\tan\alpha = 3\tan\beta$ হয় তবে দেখাও যে,

$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}$, [C. U. '46, Pat. U. '47]

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{3}{2}\tan\beta - \tan\beta}{1+\frac{3}{2}.\tan\beta\tan\beta} = \frac{\tan\beta}{2+3\tan^2\beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{2+\frac{3\sin^2\beta}{\cos^2\beta}} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta + 3\sin^2\beta} = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{4\cos^2\beta + 6\sin^2\beta}$$

$$= \frac{\sin 2\beta}{2(1+\cos 2\beta) + 3(1-\cos 2\beta)}$$ [অনু 29, সূত্র (3), (4)]

$$= \frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}.$$

উদা. 10. দেখাও যে, $\tan\theta+2\tan 2\theta+4\tan 4\theta+8\cot 8\theta=\cot\theta$.

$$8\cot 8\theta=8\cdot\frac{1}{\tan 8\theta}=8\cdot\frac{1-\tan^2 4\theta}{2\tan 4\theta}=\frac{4(1-\tan^2 4\theta)}{\tan 4\theta}$$

$$\therefore\ 4\tan 4\theta+8\cot 8\theta=\frac{4\tan^2 4\theta+4-4\tan^2 4\theta}{\tan 4\theta}=\frac{4}{\tan 4\theta}$$

$$\therefore\ 2\tan 2\theta+4\tan 4\theta+8\cot 8\theta=2\tan 2\theta+\frac{4}{\tan 4\theta}$$

$$=2\tan 2\theta+4\frac{(1-\tan^2 2\theta)}{2\tan 2\theta}$$

$$=\frac{2\tan^2 2\theta+2-2\tan^2 2\theta}{\tan 2\theta}=\frac{2}{\tan 2\theta}.$$

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $=\tan\theta+\dfrac{2}{\tan 2\theta}=\tan\theta+\dfrac{2\cdot(1-\tan^2\theta)}{2\tan\theta}$

$$=\frac{\tan^2\theta+1-\tan^2\theta}{\tan\theta}=\frac{1}{\tan\theta}=\cot\theta.$$

উদা. 11. প্রমাণ কর, $\cot A+\cot(60^\circ+A)+\cot(120^\circ+A)$
$=3\cot 3A$. [Pat. U. '44, '45]

বামপক্ষ $=\cot A+\cot(60^\circ+A)+\cot\{180^\circ-(60^\circ-A)\}$

$$=\cot A+\cot(60^\circ+A)-\cot(60^\circ-A)$$

$$=\cot A+\frac{\cot 60^\circ\cot A-1}{\cot A+\cot 60^\circ}-\frac{\cot 60^\circ\cot A+1}{\cot A-\cot 60^\circ}$$

$$=\cot A+\frac{\frac{1}{\sqrt3}\cot A-1}{\cot A+\frac{1}{\sqrt3}}-\frac{\frac{1}{\sqrt3}\cot A+1}{\cot A-\frac{1}{\sqrt3}}$$

$$=\cot A+\frac{\cot A-\sqrt3}{\sqrt3\cot A+1}-\frac{\cot A+\sqrt3}{\sqrt3\cot A-1}$$

$$=\cot A+\frac{(\cot A-\sqrt3)(\sqrt3\cot A-1)-(\sqrt3\cot A+1)(\cot A+\sqrt3)}{3\cot^2 A-1}$$

$$=\cot A-\frac{8\cot A}{3\cot^2 A-1}=\frac{3\cot^3 A-\cot A-8\cot A}{3\cot^2 A-1}$$

$$=3.\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}=3\cot 3A.$$

প্রশ্নমালা 6

প্রমাণ কর : [1 হইতে 20]

1. (i) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos 2\theta$. [C. U. 1876]

 (ii) $\cos^3\theta - \sin^3\theta = (\cos\theta - \sin\theta)(1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta)$.

2. $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = 2$. [C. U. 1861]

3. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$. [C. U. '20]

4. $\dfrac{\cot A - \tan A}{\cot A + \tan A} = \cos 2A$. [C. U. '15]

5. $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$. [C. U. 1878]

6. $\cot\theta + \tan 2\theta = 2\operatorname{cosec} 2\theta$. [C. U. '58]

7. $\operatorname{cosec} 2\theta + \cot 2\theta = \cot\theta$. [C. U. '47]

8. $\operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta = 4\operatorname{cosec} 2\theta \cot 2\theta$. [C. U. 1876]

9. $\operatorname{cosec} A - 2\cot 2A \cos A = 2\sin A$. [A. U. '58]

10. $\tan\theta + 2\tan 2\theta = \cot\theta - 4\cot 4\theta$. [C. U. 1890]

11. $\dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} - \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = 2\tan 2\theta$. [A. U. '55]

12. $\dfrac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos\theta + \cos 2\theta} = \tan\theta$. [A. U. '59]

13. $\dfrac{1 + \sin 2\theta - \cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta} = \tan\theta$. [C. U. '38]

14. $\dfrac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} + \dfrac{\tan\theta}{\tan 3\theta} = 1$.

15. $\dfrac{\tan 5\theta + \tan 3\theta}{\tan 5\theta - \tan 3\theta} = 4\cos 2\theta \cos 4\theta$. [B. H. U. '57]

16. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\tan 2\theta$. [A. U. '57]

17. $\cos^6\theta - \sin^6\theta = \frac{1}{4}\cos 2\theta(3 + \cos^2 2\theta)$.

18. $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2\theta)$.

19. $\dfrac{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right)} = \sin 2A$. [C. U.]

20. $4(\cos^3 10° + \sin^3 20°) = 3(\cos 10° + \sin 20°)$. [Bur. U. '64]

21. প্রকাশ কর :

(i) $\cos 4\theta$ কে $\cos \theta$ এর মাধ্যমে। [C. U. '63]

(ii) $\tan 4A$ কে $\tan A$ " " । [C. U. 1883]

(iii) $\sin 4A$ কে $\tan A$ " " । [C. U. 1898]

(iv) $\tan 5A$ কে $\tan A$ " " । [C. U. 1896]

22. প্রমাণ কর :

(i) $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \sec\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = 2 \sec 2\theta$. [A. U. '56]

(ii) $4 \cos\theta \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right) \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right) = \cos 3\theta$. [H. S. '66]

(iii) $\sin^3\theta + \sin^3(120° + \theta) + \sin^3(240° + \theta) = -\frac{3}{4} \sin 3\theta$.
[Pat. U. '39]

(iv) $\cos 4x - \cos 4y = 8 (\cos x - \cos y)(\cos x + \cos y)$
$(\cos x - \sin y)(\cos x + \sin y)$.
[P. U. '36]

23. মান নির্ণয় কর : $\cos\frac{\pi}{15} \cos\frac{2\pi}{15} \cos\frac{4\pi}{15} \cos\frac{8\pi}{15}$. [B. H. U. '58]

24. (i) $13\theta = \pi$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\cos\theta \cos 2\theta \cos 3\theta \cos 4\theta \cos 5\theta \cos 6\theta = \frac{1}{2^6}$.

(ii) $\theta = \frac{\pi}{2^n+1}$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$2^n \cos\theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cdots\cdots \cos 2^{n-1}\theta = 1$. [A. U. '53]

25. $\tan\theta = \frac{1}{7}$ এবং $\tan\phi = \frac{1}{3}$ হইলে দেখাও যে, $\cos 2\theta = \sin 4\phi$.
[A. U. '50]

26. $\tan^2\theta = 2 \tan^2\phi + 1$ হইলে দেখাও যে, $\cos 2\theta + \sin^2\phi = 0$.
[A. U. '37]

27. $\tan^2\theta = 1 + 2 \tan^2\phi$ হইলে দেখাও যে, $\cos 2\phi = 1 + 2 \cos 2\theta$.
[H. S. '68]

28. $\tan x = \frac{b}{a}$ হইলে $a \cos 2x + b \sin 2x$ এর মান নির্ণয় কর।

[C. U. '38, B. H. U. '40]

সপ্তম অধ্যায়

অংশ কোণ (Sub-multiple Angles)

$\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}$ ইত্যাদি কোণগুলিকে A কোণের অংশ কোণ বলা হয়।

32. $\frac{A}{2}$ এবং $\frac{A}{3}$ কোণের কোণানুপাতের মাধ্যমে A কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

পূর্ব অধ্যায়ে আমরা দেখিয়াছি যে,

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A.$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A.$

$1 + \cos 2A = 2 \cos^2 A.$

$1 - \cos 2A = 2 \sin^2 A.$

$$\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A.$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A}.$$

উপরের সূত্রগুলিতে A-র স্থলে $\frac{A}{2}$ [সুতরাং 2A-র স্থলে A] বসাইয়া পাই,

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

$$\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}.$$

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}.$$

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}.$$

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \tan^2 \frac{A}{2}.$$

$$\tan A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1-\tan^2 \frac{A}{2}}.$$

আবার, $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A.$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$

$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$ সূত্রগুলিতে A-র স্থলে $\frac{A}{3}$ [সুতরাং 3A-র স্থলে A] বসাইয়া পাই,

$$\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}.$$

$$\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}.$$

$$\tan A = \frac{3\tan\frac{A}{3} - \tan^3\frac{A}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{A}{3}}.$$

33. $\tan\frac{A}{2}$ এর মাধ্যমে A কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1 + \tan^2\frac{A}{2}}.$$

$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1 - \tan^2\frac{A}{2}}{1 + \tan^2\frac{A}{2}}.$$

[লব ও হরকে $\cos^2\frac{A}{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া।]

34. cos A-র মাধ্যমে $\cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{A}{2}$ এবং $\tan\frac{A}{2}$ নির্ণয়।

$\because \; 1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}, \quad \therefore \; \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}},$

আবার $\because \; 1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2},$

$\therefore \; \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}};$

এবং, $\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}.$

দেখা যাইতেছে যে কেবলমাত্র cos A-র মান দেওয়া থাকিলে (কিন্তু A-র মান না দেওয়া থাকিলে) $\cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{A}{2}$ এবং $\tan\frac{A}{2}$-এর প্রতিটির দুইটি করিয়া মান পাওয়া যায়। ঐ দুইটি মান সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। কিন্তু যদি A-র মান প্রদত্ত থাকে তবে $\cos\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}A$-র চিহ্ন নির্ধারণ করা যায়; সুতরাং সূত্রে যথাযথ চিহ্ন বসান যায়।

উদা. $\cos 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে $\sin 112\frac{1}{2}°$ এবং $\cos 112\frac{1}{2}°$ এর মান নির্ণয় কর।

এখানে $A = 225°$, $\therefore \frac{A}{2} = 112\frac{1}{2}°$

$\therefore \cos\frac{A}{2}$ ঋণাত্মক এবং $\sin\frac{A}{2}$ ধনাত্মক হইবে

[$\because$ $112\frac{1}{2}°$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত]

$$\therefore \cos 112\tfrac{1}{2}° = -\sqrt{\frac{1+\cos 225°}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$\sin 112\tfrac{1}{2}° = +\sqrt{\frac{1-\cos 225°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

চিহ্ন সম্পর্কে অনিশ্চয়তার (Ambiguity of signs) ব্যাখ্যা :

যদি কেবল cos A-র মান প্রদত্ত থাকে; কিন্তু A-র সম্বন্ধে অপর কিছু প্রদত্ত না থাকে তবে A-র মান, $2n\pi \pm \alpha$ [n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা] দ্বারা প্রকাশিত অসীম সংখ্যক কোণের যে কোন একটি হইতে পারে যেখানে α এমন একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যেন $\cos A = \cos \alpha$. [অনু. 43]

সুতরাং $\cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{A}{2}$ এর মান নির্ণয় করিবার জন্য প্রকৃতপক্ষে $\cos\frac{1}{2}(2n\pi \pm \alpha)$ এবং $\sin\frac{1}{2}(2n\pi \pm \alpha)$ অর্থাৎ $\cos\left(n\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right)$ এবং $\sin\left(n\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় করা হইতেছে। এখন $\cos\left(n\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right)$ বা

$\sin\left(n\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)$ এর প্রতিটির কেবল দুইটি করিয়া মান হয় যাহারা সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। যেমন, যদি n জোড় হয় তবে মনে কর $n=2m$,

$$\therefore \quad \cos\left(n\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(2m\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad [\text{অনু. } 17]$$

$$\sin\left(n\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(2m\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad [\text{অনু. } 17]$$

আবার n বিজোড় হইলে মনে কর $n=2m+1$, তখন

$$\cos\left(n\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left\{(2m+1)\,\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right\}=\cos\left\{2m\pi+\left(\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

$$=\cos\left(\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=-\cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$\sin\left(n\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left\{(2m+1)\,\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right\}=\sin\left\{2m\pi+\left(\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

$$=\sin\left(\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\mp\sin\frac{\alpha}{2}.$$

অতএব দেখা যাইতেছে যে, প্রতিটি ক্ষেত্রে $\cos\frac{A}{2}$ এবং $\sin\frac{A}{2}$ এর দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত মান পাওয়া যাইতেছে।

35. $\sin A$-র মাধ্যমে $\sin\frac{A}{2}$ এবং $\cos\frac{A}{2}$ এর মান নির্ণয়।

$$\because \quad \left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2=\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$=1+\sin A.$$

$$\therefore \quad \cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, $\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)^2=\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}$

$$=1-\sin A.$$

$$\therefore \quad \cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই,

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin A}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin A}$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin A}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin A}$$

দেখা যাইতেছে যে $\sin A$-র মান দেওয়া থাকিলে, কিন্তু A সম্বন্ধে কিছু বলা না থাকিলে $\cos\frac{A}{2}$ এবং $\sin\frac{A}{2}$ এর চারটি করিয়া মান পাওয়া যায়। কিন্তু যদি A-র মানও প্রদত্ত থাকে তবে $\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}$ এবং $\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}$ এর চিহ্ন সুনির্দিষ্টভাবে নির্ধারণ করা যায়। কেননা,

$$\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{A}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$$

এবং $$\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$$

$\therefore$ A জানা থাকিলে $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$ এবং $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$ এর চিহ্ন সহজেই নির্ধারণ করা যায় ; অর্থাৎ $\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}$ এবং $\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}$ এর কোন্ চিহ্ন (1) ও (2) এ লইতে হইবে তাহা সহজেই নির্ধারণ করা যায়।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, $\sin A$ এবং A উভয়ই প্রদত্ত থাকিলে চিহ্ন সম্বন্ধে কোন অনিশ্চয়তা থাকে না।

উদা. $\cos 67\frac{1}{2}^\circ$ এবং $\sin 67\frac{1}{2}^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

স্পষ্টতই $\cos 67\frac{1}{2}^\circ+\sin 67\frac{1}{2}^\circ$ ধনাত্মক।

এখন, $\cos 67\frac{1}{2}^\circ-\sin 67\frac{1}{2}^\circ=\sqrt{2}\cos(45^\circ+67\frac{1}{2}^\circ)$

$=\sqrt{2}\cos 112\frac{1}{2}^\circ$ ঋণাত্মক [$112\frac{1}{2}^\circ$ দ্বিতীয় পাদে বলিয়া]

$$\therefore\ \cos 67\tfrac{1}{2}^\circ+\sin 67\tfrac{1}{2}^\circ=+\sqrt{1+\sin 135^\circ}=\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}.\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \qquad (1)$$

এবং, $\cos 67\frac{1}{2}^\circ - \sin 67\frac{1}{2}^\circ = -\sqrt{1 - \sin 135^\circ} = -\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$$

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে,

$$\cos 67\frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{4}\{\sqrt{4+2\sqrt{2}} - \sqrt{4-2\sqrt{2}}\},$$

এবং, $\sin 67\frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{4}\{\sqrt{4+2\sqrt{2}} + \sqrt{4-2\sqrt{2}}\}$.

36. tan A-এর মাধ্যমে $\tan \frac{A}{2}$ নির্ণয়।

আমরা জানি, $\tan A = \dfrac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}$, [অনু. 32]

or, $\tan A \left(1 - \tan^2 \frac{A}{2}\right) = 2 \tan \frac{A}{2}$,

or, $\tan A \tan^2 \frac{A}{2} + 2 \tan \frac{A}{2} - \tan A = 0$,

ইহা $\tan^2 \frac{A}{2}$-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, সমীকরণটি সমাধান করিয়া পাই,

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot \tan A(-\tan A)}}{2 \tan A}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}$$

$\therefore$ tan A প্রদত্ত থাকিলে (কিন্তু A-র সম্বন্ধে কিছু বলা না থাকিলে) $\tan \frac{A}{2}$-এর দুইটি মান হইতে পারে। চিহ্ন সম্বন্ধে অনিশ্চয়তার ব্যাখ্যা পূর্ববৎ।

উদা. যদি $A = 160^\circ$ হয় তবে দেখাও যে, $\tan \frac{A}{2} = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}$.

আমরা জানি $\tan \frac{A}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}$ ... ...(1)

এখন $A = 160^\circ$ বলিয়া $\tan \frac{A}{2} = \tan 80^\circ$ স্পষ্টতই ধনাত্মক। সুতরাং (1)-এর লব ও হরের চিহ্ন অভিন্ন হইবে। কিন্তু হর $= \tan A = \tan 160^\circ$

ঋণাত্মক। সুতরাং লব ঋণাত্মক হইবে; অর্থাৎ লব $= -1-\sqrt{1+\tan^2 A}$ হইবে [$\sqrt{1+\tan^2 A}$-এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া $-1+\sqrt{1+\tan^2 A}$ ঋণাত্মক হইবে না।]

$$\therefore \quad \tan\frac{A}{2}=\frac{-1-\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}.$$

37. 18°, 36°, 3° কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

মনে কর, $A=18°$, $\therefore\ 5A=90°$, or, $2A=90°-3A$,

$\therefore\ \sin 2A=\sin(90°-3A)=\cos 3A$,

or, $2\sin A\cos A=4\cos^3 A-3\cos A$,

or, $2\sin A=4\cos^2 A-3$, [$\because\ \cos A=\cos 18°\neq 0$]

or, $2\sin A=4(1-\sin^2 A)-3$,

or, $4\sin^2 A+2\sin A-1=0$,

$$\therefore\ \sin A=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.4(-1)}}{2.4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

এখন A সূক্ষ্মকোণ বলিয়া $\sin A$ ধনাত্মক। অতএব ঋণাত্মক মানটিকে বর্জন করিয়া পাই, $\mathbf{\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$.

আবার, $\cos 18°=+\sqrt{1-\sin^2 18°}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$\therefore\ \mathbf{\cos 18°=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

$\cos 36°=1-2\sin^2 18°$ [অনু. 29]

$$=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$\sin 36°=+\sqrt{1-\cos^2 36°}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

54° ও 72° কোণ যথাক্রমে 36° ও 18° কোণের পূরক (Complementary) কোণ বলিয়া উহাদের কোণানুপাত সহজেই নির্ণয় করা যায়।

এখন, $\sin 3° = \sin(18° - 15°)$

$$= \sin 18° \cos 15° - \cos 18° \sin 15°$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

[অনু. 22, উদা. দ্রষ্টব্য]

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \times \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}.\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}}(\sqrt{3}-1).$$

এবং এইরূপে $\cos 3° = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1).$

টীকাঃ এ পর্যন্ত যে সকল কোণের কোণানুপাত জানা গিয়াছে সেই সকল কোণানুপাতের সাহায্যে 3° এর গুণিতক যে কোন কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করা যায়। যেমন $6° = 36° - 30°$, এখন 36° ও 30° কোণের কোণানুপাত জানা আছে, ∴ 6° এর কোণানুপাত সহজেই নির্ণেয়।

ঐরূপ, $9° = 45° - 36°$, $12° = 30° - 18°$, $21° = 36° - 15°$,

$24° = 45° - 21°$, $27° = 30° - 3°$ ইত্যাদি।

3° এর গুণিতক যদি 45° অপেক্ষা বড় হয়, তবে ঐ কোণটির কোণানুপাত উহার পূরক কোণের কোণানুপাতের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. দেখাও যে, $\sin^2 24° - \sin^2 6° = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$. [A. U. '51]

বামপক্ষ $= \sin(24° + 6°) . \sin(24° - 6°)$ [অনু. 23]

$$= \sin 30° \sin 18° = \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{8}.$$

উদা. 2. $\tan 7\frac{1}{2}^\circ$ এর মান নির্ণয় কর। [H. S. '66 Comp.]

$$\tan 7\tfrac{1}{2}^\circ = \frac{\sin 7\frac{1}{2}^\circ}{\cos 7\frac{1}{2}^\circ} = \frac{2\sin^2 7\frac{1}{2}^\circ}{2\sin 7\frac{1}{2}^\circ \cos 7\frac{1}{2}^\circ} = \frac{1-\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} \quad [\text{অনু. } 29]$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} \quad [\text{অনু. } 22] \qquad = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$$

$$= \sqrt{3}(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

$$= (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1).$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, $\cos^2 18^\circ \sin^2 36^\circ - \sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{1}{16}$.

[C. U. '46, '58]

$$\text{বামপক্ষ} = (\tfrac{1}{2} \cdot 2\cos 18^\circ \sin 36^\circ)^2 - \tfrac{1}{2} \cdot 2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ$$

$$= \tfrac{1}{4}(\sin 54^\circ + \sin 18^\circ)^2 - \tfrac{1}{2}(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)$$

$$= \tfrac{1}{4}(\cos 36^\circ + \sin 18^\circ)^2 - \tfrac{1}{2}(\cos 36^\circ - \sin 18^\circ)$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4} \times \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{16} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{16}.$$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ = 1$.

[B. H. U. '54, '59]

$$\text{বামপক্ষ} = \tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ$$

$$= \frac{\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ}{\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ}$$

$$= \frac{(2\sin 6^\circ \sin 66^\circ)(2\sin 42^\circ \sin 78^\circ)}{(2\cos 6^\circ \cos 66^\circ)(2\cos 42^\circ \cos 78^\circ)}$$

$$= \frac{(\cos 60^\circ - \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ - \cos 120^\circ)}{(\cos 60^\circ + \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ + \cos 120^\circ)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2} - \sin 18^\circ)(\cos 36^\circ + \frac{1}{2})}{(\frac{1}{2} + \sin 18^\circ)(\cos 36^\circ - \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = 1.$$

উদা. 5. যদি $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,

$\tan\frac{\theta}{2}$ এর একটি মান হইতেছে $\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}$. [Pat. U. '42]

প্রদত্ত আছে, $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$

$$\text{or,}\quad \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}}{1-\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}},$$

$$\text{or,}\quad \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{\beta}{2}\right)-\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{\beta}{2}\right)-\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\tan^2\frac{\beta}{2}-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{or,}\quad \frac{2\tan^2\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{2\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan^2\frac{\beta}{2}},$$ [By Comp. & Divi]

$$\text{or,}\quad \tan^2\frac{\theta}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\cot^2\frac{\beta}{2}.$$

$\therefore$ $\tan\frac{\theta}{2}$ এর একটি মান $\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}$.

উদা. 6. যদি $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}$ হয় তবে দেখাও যে,

$\cos\phi=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$. [Pat. U. '40, A. U. '44, '49 H. S. '67]

$\because\quad \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2},$

$\therefore\quad \tan\frac{\phi}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\theta}{2},\qquad$ or, $\tan^2\frac{\phi}{2}=\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{\theta}{2},$

$$\text{or,}\quad \frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}=\frac{1-e-\tan^2\frac{\theta}{2}-e\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-e+\tan^2\frac{\theta}{2}+e\tan^2\frac{\theta}{2}}\quad \text{[By Comp. \& Divi.]}$$

$$=\frac{\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)-e\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)-e\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)},$$

$$\text{or,}\quad \frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}=\frac{\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-e}{1-e\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}$$

লব ও হরকে $1+\tan^2\frac{\theta}{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া

or, $\cos\phi=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$.

প্রশ্নমালা 7

প্রমাণ কর :—[1 হইতে 9]

1. $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$.   2. $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\cot\frac{\theta}{2}+1}{\cot\frac{\theta}{2}-1}$.

3. $\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}=2\cot A$. [A. U. '56]

4. $(1+\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)=\cot\frac{\theta}{2}-\tan\frac{\theta}{2}$

[C. U. 1870]

5. $\sec\theta+\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ [C. U. '39 ; A. U. '50]

6. $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$. [C. U. '61, A. U. '50]

7. $\frac{\sec\theta-\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$. [C. U. 1871]

8. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$. [A. U.' 58]

9. $\tan\frac{A+B}{2}+\tan\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin A}{\cos A+\cos B}$. [B. H. U. '39, '53]

10. $\sin 22\frac{1}{2}°$ এবং $\cos 22\frac{1}{2}°$-এর মান নির্ণয় কর।

11. দেখাও যে, $\cos 7° 30'=\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

[Pat. U. '38]

12. যদি, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ এবং α এর মান $180°$ হইতে $270°$-এর মধ্যে হয়, তবে $\sin\frac{\alpha}{2}$ এবং $\cos\frac{\alpha}{2}$ এর মান নির্ণয় কর। [Pat. U. '42]

13. যদি, A-এর মান $90°$ হইতে $180°$-এর মধ্যে হয় এবং $\sin A=\frac{4}{5}$ হয় তবে $\tan\frac{A}{2}$-এর মান নির্ণয় কর।

14. মান নির্ণয় কর : $\sin^2 72° \cos^2 54° - \sin 54° \cos 72°$.

[C. U. '48]

15. প্রমাণ কর :

(i) $(\cos^2 66°-\sin^2 6°)(\cos^2 48°-\sin^2 12°)=\frac{1}{16}$. [C. U. '49]

(ii) $\cos 6° \cos 42° \cos 66° \cos 78°=\frac{1}{16}$. [H. S. '69]

16. প্রমাণ কর : $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

[Pat. U. '58, B. H. U. '42]

17. যদি, $\frac{1-\sin A}{1+\sin A}=\tan^2 B$ হয় তবে দেখাও যে, $2B+A=90°$.

[C. U. 1877]

18. যদি, $\sec(\phi+\alpha)+\sec(\phi-\alpha)=2\sec\phi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

[Pat. U., '44, '48]

19. $\tan\frac{\theta}{2}=\tan^3\frac{\phi}{2}$ এবং $\tan\phi=2\tan\alpha$ হইলে দেখাও যে, $\theta+\phi=2\alpha$.

[C. U. '45]

20. দেখাও যে, $\sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$.

[C. U. '53]

21. প্রমাণ কর যে, $2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$ এবং $270°>A>180°$ হইলে সঠিক চিহ্নগুলি নির্ধারণ কর।

[B. H. '31]

22. দেখাও যে A প্রথম বা চতুর্থপাদে অবস্থিত হইলে,

$$2\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}.$$

অষ্টম অধ্যায়

শর্তাধীন ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী

(Conditional Trigonometrical Identities)

38. এই অধ্যায়ে তিন বা ততোধিক কোণ যদি বিশেষ সম্পর্ক যুক্ত হয় তবে সেই সকল কোণের কোণানুপাত সম্বন্ধীয় অভেদ সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে। বিশেষতঃ যদি তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হয় তবে ঐ কোণ সমূহের কোণানুপাত সংক্রান্ত অভেদগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়। এক্ষেত্রে নিম্নের সিদ্ধান্তগুলি বিশেষভাবে লক্ষ্য করা প্রয়োজন :

যদি, $A+B+C=\pi$ হয়, তবে $A+B=\pi-C$;

$$\therefore \sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C.$$

$$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C.$$

$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C.$$

অনুরূপে, $\sin(B+C)=\sin A,\quad \cos(B+C)=-\cos A,$

$$\tan(B+C)=-\tan A.$$

এবং, $\sin(C+A)=\sin B,\quad \cos(C+A)=-\cos B,$

$$\tan(C+A)=-\tan B.$$

আবার, $A+B+C=\pi$ হইলে, $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}.$

$$\therefore \sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}.$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}.$$

অনুরূপে, $\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2},$ ইত্যাদি

$\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{A}{2},$ „

$\tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{A}{2},$ „

উপরোক্ত ফলগুলি পরবর্তী আলোচনায় সর্বদাই ব্যবহৃত হইবে। প্রার্থিত সিদ্ধান্তে উপনীত হইবার জন্য যেমন প্রয়োজন সেইভাবেই ঐগুলিকে কাজে লাগান হইবে।

কখনও $\sin(A+B)$ এর স্থলে $\sin C$ আবার কখনও $\cos C$ এর স্থলে $-\cos(A+B)$ বসাইতে হইবে।

39. কতিপয় প্রয়োজনীয় অভেদ।

1. $A+B+C=\pi$ হইলে,

(i) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$ [C. U., B. H. U.]

(ii) $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$ [C. U. ; B. H. U ; Bur. U.]

(iii) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$ [C. U.]

প্রমাণ: (i) $\because A+B+C=\pi, \quad \therefore A+B=\pi-C.$

$\therefore \tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C.$

or, $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C,$

or, $\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C,$

$\therefore \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

(ii) $\because A+B+C=\pi, \quad \therefore A+B=\pi-C,$

$\therefore \cot(A+B)=-\cot C,$

or, $\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}=-\cot C,$

or, $\cot A\cot B-1=-\cot B\cot C-\cot C\cot A,$

$\therefore \cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$

(iii) $\because A+B+C=\pi, \quad \therefore \frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}.$

$\therefore \tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2},$

or, $\dfrac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}},$

or, $\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2},$

$\therefore \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$

2. $A+B+C=\pi$ হইলে,

(i) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4 \sin A \sin B \sin C$. [C. U.]

(ii) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4 \cos A \cos B \cos C-1$.

(iii) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2 \cos A \cos B \cos C$.

[Pat. U.]

(iv) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2 \cos A \cos B \cos C$.

[C. U., Pat. U.]

(v) $\sin A+\sin B+\sin C=4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. [C. U.]

(vi) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$. [C. U.]

প্রমাণ : (i) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$=(\sin 2A+\sin 2B)+\sin 2C$

$=2 \sin (A+B) \cos (A-B)+\sin 2C$

$=2 \sin C \cos (A-B)+2 \sin C \cos C$

[$\because \sin (A+B)=\sin (\pi-C)=\sin C$]

$=2 \sin C [\cos (A-B)+\cos C]$

$=2 \sin C [\cos (A-B)-\cos (A+B)]$

[$\because \cos (A+B)=\cos (\pi-C)=-\cos C$]

$=2 \sin C. 2 \sin A \sin B=4 \sin A \sin B \sin C$.

(ii) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=(\cos 2A+\cos 2B)+\cos 2C$

$=2 \cos (A+B) \cos (A-B)+\cos 2C$

$=-2 \cos C \cos (A-B)+2 \cos^2 C-1$

[$\because \cos (A+B)=\cos (\pi-C)=-\cos C$]

$=-2 \cos C [\cos (A-B)-\cos C]-1$

$=-2 \cos C [\cos (A-B)+\cos (A+B)]-1$

$=-2 \cos C. 2 \cos A \cos B-1=-4 \cos A \cos B \cos C-1$.

(iii) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$=\frac{1}{2}[1-\cos 2A+1-\cos 2B+1-\cos 2C]$ [অনু. 29 (4)]

$=\frac{1}{2}[3-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)]$

$=\frac{1}{2}[3-(-4\cos A\cos B\cos C-1)]$ [2 (ii) হইতে]

$=\frac{1}{2}[4+4\cos A\cos B\cos C]=2+2\cos A\cos B\cos C.$

(iv) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$=\frac{1}{2}[1+\cos 2A+1+\cos 2B+1+\cos 2C]$ [অনু. 29 (3)]

$=\frac{1}{2}[3+\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C]$

$=\frac{1}{2}[3-4\cos A\cos B\cos C-1]$

$=\frac{1}{2}[2-4\cos A\cos B\cos C]=1-2\cos A\cos B\cos C.$

(v) $\sin A+\sin B+\sin C=(\sin A+\sin B)+\sin C$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\left[\because\ \sin\frac{A+B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$\left[\because\ \sin\frac{C}{2}=\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{A+B}{2}\right)\right\}=\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

(vi) $\cos A+\cos B+\cos C=(\cos A+\cos B)+\cos C$

$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$

$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$

$$\left[\because \cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}\right]$$

$=2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right]+1$

$=2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]+1$

$=2\sin\frac{C}{2}.\,2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+1$

$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. $A+B+C=\pi$ হইলে দেখাও যে,

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$$

[Pat. U. '41]

দক্ষিণপক্ষ $=1+2\sin\frac{\pi-A}{4}.\left[2\sin\frac{\pi-B}{4}.\sin\frac{\pi-C}{4}\right]$

$=1+2\sin\frac{\pi-A}{4}\left[\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}\right]$

$=1+2\sin\frac{\pi-A}{4}\left[\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{\pi+A}{4}\right]$

$[\because B+C=\pi-A]$

$=1+2\sin\frac{\pi-A}{4}.\cos\frac{B-C}{4}-2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}$

$$=1+\sin\frac{\pi-A+B-C}{4}+\sin\frac{\pi-A-B+C}{4}-\left[\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(-\frac{2A}{4}\right)\right]$$

$$=1+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-1+\sin\frac{A}{2}\quad[\because\ A+B+C=\pi]$$

$$=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}.$$

উদা. 2. $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ হইলে দেখাও যে,

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

[C. U. '43, '47, '58]

বামপক্ষ $=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha+1-\cos 2\beta)+\sin^2\gamma$

$=1-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+\sin^2\gamma$

$=1-\frac{1}{2}\cdot 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin^2\gamma$

$=1-\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)+\sin^2\gamma$ $\left[\because\ \cos(\alpha+\beta)=\cos(\pi/2-\gamma)=\sin\gamma.\right.$

$=1-\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)-\sin\gamma]$

$=1-\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$=1-\sin\gamma\cdot 2\sin\alpha\sin\beta=1-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

উদা. 3. $A+B+C=2S$ হইলে দেখাও যে,

$\sin(S-A)+\sin(S-B)+\sin(S-C)-\sin S$

$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$ [A.U. '59]

বামপক্ষ $=[\sin(S-A)+\sin(S-B)]+[\sin(S-C)-\sin S]$

$=2\sin\frac{2S-(A+B)}{2}\cos\frac{B-A}{2}+2\cos\frac{2S-C}{2}\sin\left(\frac{-C}{2}\right)$

$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B-A}{2}-2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}$ $\left[\because\ 2S=A+B+C\right.$ এবং $\left.\sin\left(\frac{-C}{2}\right)=-\sin\frac{C}{2}.\right.$

$=2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{B-A}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]$

$=2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}$

$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

উদা. 4. যে কোন ত্রিভুজ ABC তে প্রমাণ কর যে,

$\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$

$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$. [B. H. U. '50, A. U. '58]

বামপক্ষ $=\sin(A+B+C+C-A)+\sin(A+B+C+A-B)$

$+\sin(A+B+C+B-C)$

$=\sin\{\pi-(A-C)\}+\sin\{\pi-(B-A)\}+\sin\{\pi-(C-B)\}$

$=\sin(A-C)+\sin(B-A)+\sin(C-B)$

$=2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{2A-B-C}{2}-\sin(B-C)$

$=2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{2A-B-C}{2}-2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$=2\sin\frac{B-C}{2}\left[\cos\frac{2A-B-C}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right]$

$=2\sin\frac{B-C}{2}\cdot 2\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-A}{2}$

$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$.

উদা. 5. $x+y+z=xyz$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

[A. U. '51, B. H. U.' 54]

মনে কর, $x=\tan A$, $y=\tan B$, $z=\tan C$,

$\therefore$ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$,

or, $\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C=0$ ··· (1)

এখন, $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$

$=0$ [(1) হইতে]

$\therefore$ $A+B+C=n\pi$, n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

or, $2A+2B+2C=2n\pi$,

$\therefore$ $\tan(2A+2B)=\tan(2n\pi-2C)$,

or, $\frac{\tan 2A+\tan 2B}{1-\tan 2A \tan 2B}=-\tan 2C$, [অনু : 17]

$\therefore$ $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A \tan 2B \tan 2C$ ... (2)

এখন $\tan 2A=\frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2x}{1-x^2}$;

অনুরূপে, $\tan 2B=\frac{2y}{1-y^2}$ এবং, $\tan 2C=\frac{2z}{1-z^2}$,

$$\therefore \frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}$$

$$=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}$$ [(2) হইতে]

প্রশ্নমালা 8

$A+B+C=\pi$ হইলে প্রমাণ কর [1 হইতে 20]:—

1. $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4 \cos A \sin B \cos C$.

2. $-\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=1-4 \cos A \sin B \sin C$.

3. $\sin A+\sin B-\sin C=4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

4. $\cos A-\cos B+\cos C=4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}-1$.

5. $\frac{\sin A-\sin B+\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}$.

6. $\frac{1+\cos A-\cos B+\cos C}{1+\cos A+\cos B-\cos C}=\tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$.

7. $\frac{\cos A}{\sin B \sin C}+\frac{\cos B}{\sin C \sin A}+\frac{\cos C}{\sin A \sin B}=2$. [C. U. '49]

8. $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A \tan 2B \tan 2C$.

9. $\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}=\frac{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}{2 \cos A \cos B \cos C}$. [C. U.]

10. $(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)(\cot A+\cot B)$

$=\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C$.

11. $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C.$

[A. U. '59, B. H. U. '59]

12. $\cos^2 2A+\cos^2 2B+\cos^2 2C=1+2\cos 2A\cos 2B\cos 2C.$

[C. U. '60]

13. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

[C. U. '48]

14. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

[C. U. '61]

15. $\cos^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

[B. H. U. '58]

16. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$ [C. U. '57]

17. $\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{C+A}{2}$

$$=4\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}.$$

18. $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$

$$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}.$$

[B. H. U. '51 ; Pat. U. '44]

19. $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$ [C. U. '41]

20. $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C$

$+\operatorname{cosec} A\operatorname{cosec} B\operatorname{cosec} C.$ [C. U. '48]

$A+B+C=\frac{\pi}{2}$ হইলে প্রমাণ কর, [21 হইতে 24] :—

21. $\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B=1.$

[C. U. '43, '58]

22. $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A \cot B \cot C.$ [Pat. U. '43]

23. $\cos (A-B-C)+\cos (B-C-A)+\cos (C-A-B)$
$=4 \cos A \cos B \cos C.$

24. $\dfrac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C}=\cot A \cot B.$

25. $A+B+C=\pi$ হইলে প্রমাণ কর :—

(i) $\sin (B+C-A)+\sin (C+A-B)+\sin (A+B-C)$
$=4 \sin A \sin B \sin C.$ [A. U. '53, '57]

(ii) $\sin^2 \frac{A}{2}+\sin^2 \frac{B}{2}+\sin^2 \frac{C}{2}=1-2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$
[Pat. U. '42, A. U. '54]

(iii) $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}+\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C-A}{2}+\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$=\sin A+\sin B+\sin C.$

26. $\alpha+\beta=\gamma$ হইলে দেখাও যে,
$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$
[C. U. '40, Pat. U. '43]

27. $A+B+C=0$ হইলে দেখাও যে,
$\cos A+\cos B+\cos C=4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}-1.$

28. $A+B+C=\pi$ এবং, $\sin \left(A+\frac{C}{2}\right)=n \sin \frac{C}{2}$ হইলে দেখাও যে,
$\tan \frac{A}{2} \tan\frac{B}{2}=\frac{n-1}{n+1}.$ [Pat. U. '45]

29. $A+B+C=2S$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$\cos^2 S+\cos^2(S-A)+\cos^2 (S-B)+\cos^2(S-C)$
$=2(1+\cos A \cos B \cos C).$ [A. U. '57, '58]

30. যে কোন ত্রিভুজ ABC তে প্রমাণ কর যে,

(i) $(\sin B-\cos B)^2+(\sin C-\cos C)^2-(\sin A+\cos A)^2$
$=1-4 \sin A \sin B \sin C.$

(ii) $\tan^2 B-\tan^2 C$
$=2 \tan A \tan B \tan C\,(\text{cosec } 2B-\text{cosec } 2C).$
[C. U. '62]

31. $A+B+C=360°$ হইলে দেখাও যে,

$1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=0.$

[Pat. U. '46]

32. $A+B+C+D=2\pi$ হইলে দেখাও যে,

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+\cos 2D$

$=4\cos(A+B)\cos(A+C)\cos(A+D).$ [C. U. '42]

33. $\cos A+\cos B+\cos C=0$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=12\cos A\cos B\cos C.$

34. $x+y+z=xyz$ হইলে প্রমাণ কর :—

(i) $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$

$=4xyz.$ [B. H. U. '54, A. U. '51]

(ii) $\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}+\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}+\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}.$

নবম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ এবং সাধারণ মান

(Trigonometrical Equations and General Values.)

40. এক বা একাধিক ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক বিশিষ্ট কোন সমীকরণ যদি ঐ সমীকরণের সহিত সংশ্লিষ্ট কোণ বা কোণ সমূহের কতকগুলি মান (সবগুলি নহে) দ্বারা সিদ্ধ হয় তবে ঐ সমীকরণকে একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বলে। ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধান বলিতে বুঝায় সেই কোণ সমূহ নির্ণয় করা যাহারা প্রদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

সর্বাপেক্ষা সরল একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ, $\sin x=\frac{1}{2}$ লইয়া আলোচনা করা যাক। স্পষ্টতই $x=\frac{\pi}{6}$ এবং $\frac{5\pi}{6}$ প্রদত্ত সমীকরণটির দুইটি সমাধান। কিন্তু আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি যে, যে সকল কোণ একই অন্তিমবাহু বিশিষ্ট তাহাদের কোণানুপাতের মান অভিন্ন। অত এব এমন অসংখ্য কোণ হইতে পারে যাহাদের সাইনের মান $=\frac{1}{2}$.

যেমন, $\pm 2\pi+\frac{\pi}{6}, \pm 4\pi+\frac{\pi}{6}, \pm 6\pi+\frac{\pi}{6}, \cdots\cdots$

এবং, $\pm 2\pi+\frac{5\pi}{6}, \pm 4\pi+\frac{5\pi}{6}, \pm 6\pi+\frac{5\pi}{6}, \cdots\cdots$ কোণ সমূহের সাইনের মান $=\frac{1}{2}$. অতএব ঐ কোণ সমূহ $\sin x=\frac{1}{2}$ এই সমীকরণের বীজ। অতএব বলা যায় যে, $\sin x=\frac{1}{2}$. এই ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের অসংখ্য সমাধান আছে। এইরূপ যে কোন ত্রিকোণমিতিক সমীকরণেরই অসংখ্য সমাধান আছে এবং ওই অসংখ্য সমাধানকে সমগ্রভাবে বলে সমীকরণটির সম্পূর্ণ বা সাধারণ সমাধান (Complete or general solution.)।

41. (i) $\mathbf{\sin\theta=0}$, (ii) $\mathbf{\tan\theta=0}$, (iii) $\mathbf{\cos\theta=0}$, (iv) $\mathbf{\cot\theta=0}$ **সমীকরণগুলির সাধারণ সমাধান।**

(i) সংজ্ঞানুসারে, $\sin\theta=\frac{y}{r}$, [অনু: 9·1]

সুতরাং, $\sin\theta=0$ হইলে, $\frac{y}{r}=0$, or, $y=0$ হইবে। এখন θ

কোণের অন্তিম বাহু যদি OX বা OX′ এর সহিত মিলিয়া যায় তবেই $y=0$ হইতে পারে ;

অর্থাৎ তখন, $\theta=0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots\ldots$

বা, $\theta=-\pi, -2\pi, -3\pi, -4\pi, \ldots\ldots$

অর্থাৎ, $\theta=0$, বা, π-এর যে কোন গুণিতক ;

অর্থাৎ, $\theta=n\pi$, যেখানে n শূন্য বা যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

সুতরাং, $\sin\theta=0$ এর সাধারণ বা সম্পূর্ণ সমাধান হইল, $\theta=n\pi$.

(ii) যেহেতু, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ [অনু: 9·1], সুতরাং, $\tan\theta=0$ হইলে $y=0$ হইবে। সুতরাং পূর্বের মতই $\tan\theta=0$, এই সমীকরণের সম্পূর্ণ সমাধান হইল, $\theta=n\pi$, যেখানে, $n=0$, বা, যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

(iii) সংজ্ঞানুসারে, $\cos\theta=\frac{x}{r}$; অতএব, $x=0$ হইলে তবেই $\cos\theta=0$ হইতে পারে এবং, $x=0$ হয় তখনই যখন θ কোণের অন্তিম বাহু OY বা, OY′-এর সহিত মিলিয়া যায়।

তখন, $\theta=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots$

বা, $\theta=-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots$

অর্থাৎ, $\theta=\frac{\pi}{2}$-এর যে কোন বিজোড় গুণিতক,

অর্থাৎ, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে $n=0$, বা, যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

(iv) $\because \cot\theta=\frac{x}{y}$ $\therefore \cot\theta=0$ হইলে $x=0$ হইবে। সুতরাং পূর্বের মতই $\cot\theta=0$, সমীকরণের সম্পূর্ণ সমাধান $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ [n পূর্বের অর্থে]।

টীকা: $\sec\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$ এর সাংখ্যমান কখনও 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না ; অতএব $\sec\theta=0$, এবং $\operatorname{cosec}\theta=0$, সমীকরণের কোন সমাধান নাই।

42. $\sin \theta = k$ $[-1 \leq k \leq 1]$ আকারের সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

মনে কর, যে সকল কোণের সাইন, k-এর সমান তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতমটি α. তাহা হইলে, $\sin \theta = k = \sin \alpha$.

or, $\sin \theta - \sin \alpha = 0$, or, $2 \cos \frac{\theta+\alpha}{2} \sin \frac{\theta-\alpha}{2} = 0$,

or, $\cos \frac{\theta+\alpha}{2} \sin \frac{\theta-\alpha}{2} = 0$,

$\therefore \cos \frac{\theta+\alpha}{2} = 0 \qquad \frac{\theta+\alpha}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ ... ...(1)

[অনু: 41, (iii)]

অথবা, $\sin \frac{\theta-\alpha}{2} = 0$, $\therefore \frac{\theta-\alpha}{2} = m\pi$ ......(2) [অনু: (i)]

$m = 0$, বা, যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

(1) হইতে, $\theta = (2m+1)\pi - \alpha$ ... ...(3)

এবং, (2) হইতে, $\theta = 2m\pi + \alpha$ ... ...(4)

অতএব, (3) ও (4) একত্রে, $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$, $n = 0$ বা, যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

সুতরাং, $\sin \theta = k = \sin \alpha$, এই সমীকরণের সাধারণ সমাধান হইতেছে,

$\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$.

আবার যদি, $\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} \alpha$ হয় তবে $\sin \theta = \sin \alpha$,

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n \alpha$.

সুতরাং, যে সকল কোণের sine বা cosecant এর মান যথাক্রমে α-এর sine বা cosecant এর মানের সমান তাহাদের সাধারণ মান ; অর্থাৎ $\sin \theta = \sin \alpha$, বা, $\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} \alpha$, সমীকরণের সম্পূর্ণ সমাধান হইতেছে,

$\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$.

অনুসি. (i) $\sin \theta = 1$ হইলে, $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$.

প্রমাণ : $\sin\theta = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$, $\therefore\ \theta = m\pi + (-1)^m\frac{\pi}{2}$.

এখন, m জোড় হইলে মনে কর, $m = 2n$,

$$\therefore\ \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

আবার, m বিজোড় হইলে, $m = 2n+1$,

$$\therefore\ \theta = (2n+1)\pi - \frac{\pi}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

$\therefore\ \sin\theta = 1$ হইলে, $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$.

(ii) $\sin\theta = -1$ হইলে, $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$, বা, $2n\pi + \frac{3\pi}{2}$.

প্রমাণ : $\sin\theta = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore\ \theta = m\pi + (-1)^m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = m\pi - (-1)^m\frac{\pi}{2}.$$

যখন, m জোড়, $m = 2n$, $\therefore\ \theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$.

যখন, m বিজোড়, $m = (2n+1)$, $\therefore\ \theta = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}$

$$= 2n\pi + \frac{3\pi}{2}.$$

43. $\cos\theta = k\ [-1 \le k \le 1]$ আকারের সমীকরণের সম্পূর্ণ সমাধান।

মনে কর, যে সকল কোণের কোসাইন, k এর সমান তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতমটি α. তাহা হইলে, $\cos\theta = k = \cos\alpha$.

or, $\cos\alpha - \cos\theta = 0$, or, $2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$,

or, $\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$,

$\therefore\ \sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$, $\therefore\ \frac{\theta+\alpha}{2} = n\pi \cdots\cdots(1)$

or, $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$, $\therefore\ \frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi \cdots\cdots(2)$

[$n = 0$, বা, যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

(1) হইতে, $\theta=2n\pi-\alpha$ ... ... (3)

(2) হইতে, $\theta=2n\pi+\alpha$ ... ... (4)

$\therefore$ (3) ও (4) একত্রিত করিয়া, $\theta=2n\pi\pm\alpha$.

সুতরাং, $\cos\theta=k=\cos\alpha$ এই সমীকরণের সাধারণ সমাধান,

$$\theta=2n\pi\pm\alpha.$$

আবার যদি $\sec\theta=\sec\alpha$ হয় তবে $\cos\theta=\cos\alpha$

$$\therefore\ \theta=2n\pi\pm\alpha.$$

সুতরাং, যে সকল কোণের cosine বা secant এর মান যথাক্রমে α-এর cosine বা secant এর মানের সমান তাহাদের সাধারণ মান; অর্থাৎ $\cos\theta=\cos\alpha$ বা $\sec\theta=\sec\alpha$ সমীকরণের সম্পূর্ণ সমাধান হইতেছে,

$$\boldsymbol{\theta=2n\pi\pm\alpha}.$$

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $\cos\theta=1$ হইলে $\theta=2n\pi$,

[$n=0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।]

$$\because\ \cos\theta=1=\cos 0,\quad \therefore\ \theta=2n\pi.$$

(ii) $\cos\theta=-1$ হইলে $\theta=(2n+1)\pi$,

[$n=0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।]

$\because\ \cos\theta=-1=\cos\pi$,

$\therefore\ \theta=(2n+1)\pi$. [$n=0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা]

44. $\tan\theta=k$ সমীকরণের সম্পূর্ণ সমাধান।

মনে কর, যে সকল কোণের tangent, k এর সমান তাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতমটি α, তাহা হইলে $\tan\theta=k=\tan\alpha$,

or, $\tan\theta-\tan\alpha=0$, or, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$,

or, $\dfrac{\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha}=0$, or, $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha}=0$,

or, $\sin(\theta-\alpha).\ \sec\theta\sec\alpha=0$,

$\therefore\ \sin(\theta-\alpha)=0$ [$\because$ $\sec\theta$ এবং $\sec\alpha$ এর কোনটিই 0 হইতে পারে না।]

$\therefore\ \theta-\alpha=n\pi$, [$n=0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা]

or, $\theta=n\pi+\alpha$.

আবার যদি, $\cot\theta=\cot\alpha$ হয় তবে $\tan\theta=\tan\alpha$, $\therefore\ \theta=n\pi+\alpha$

সুতরাং, যে সকল কোণের tangent বা cotangent এর মান যথাক্রমে α এর tangent বা cotangent এর মানের সমান তাহাদের সাধারণ মান; অর্থাৎ $\tan\theta=\tan\alpha$ বা, $\cot\theta=\cot\alpha$ সমীকরণের সম্পূর্ণ সমাধান হইতেছে,

$$\theta=n\pi+\alpha.$$

45. মনে রাখিবার সুবিধার জন্য সাধারণ মানের সূত্রগুলিকে একত্রে লিপিবদ্ধ করা হইল। n=0 বা যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা,

(1) $\sin\theta=0$ হইলে, $\theta=n\pi$.

$\sin\theta=\sin\alpha$ " , $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$.

$\sin\theta=1$ " , $\theta=(4n+1)\frac{\pi}{2}$.

$\sin\theta=-1$ " , $\theta=(4n-1)\frac{\pi}{2}$, or, $(4n+3)\frac{\pi}{2}$.

(2) $\cos\theta=0$ হইলে, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

$\cos\theta=\cos\alpha$ " , $\theta=2n\pi\pm\alpha$.

$\cos\theta=1$ " , $\theta=2n\pi$.

$\cos\theta=-1$ " , $\theta=(2n+1)\pi$.

(3) $\tan\theta=0$ হইলে, $\theta=n\pi$ এবং $\cot\theta=0$ হইলে, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

$\tan\theta=\tan\alpha$ হইলে, $\theta=n\pi+\alpha$.

উদা. (1) $\sin\theta=\frac{1}{2}$ এই সমীকরণের সম্পূর্ণ সমাধান নির্ণয় কর।

$\sin\theta=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\therefore\ \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ ইহাই নির্ণেয় সম্পূর্ণ সমাধান।

(2) সমাধান কর: $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$ $\therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. ইহাই নির্ণেয় সম্পূর্ণ সমাধান।

(3) সমাধান কর : $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = n\pi - \frac{\pi}{6}$.

46. $a\cos\theta + b\sin\theta = c$; [a, b, c ধ্রুবক এবং $c \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$] আকারের ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান।

প্রদত্ত সমীকরণের উভয়পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

এখন, $\because$ $a \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$, $b \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ এবং স্পষ্টতই,

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

$\therefore$ মনে করা যাইতে পারে, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$

এবং $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$.

$\therefore$ (1) হইতে পাই, $\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

or, $\cos(\theta-\alpha) = \cos\beta$, মনে করি $\left[\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta\right.$ মনে করা যায়। $\because$ $c \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore$ $\theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$,

or, $\theta = 2n\pi \pm \beta + \alpha$.

টীকা : (i) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ এই সমীকরণের উভয় পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করা হইয়াছে প্রদত্ত সমীকরণের বামপক্ষের রাশিটিকে $\cos(\theta-\alpha)$ আকারে [বা $\sin(\theta+\alpha)$ আকারে] প্রকাশ করিবার জন্য।

(ii) $c > \sqrt{a^2+b^2}$ হইলে সমীকরণটির সমাধান নাই, যেহেতু কোন কোণের cosine [বা sine] এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না।

(iii) এই আকারের সমীকরণের সমাধান উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া করা ঠিক নয় ; কারণ প্রাপ্ত সমাধানে অবান্তর বীজ [Extraneous roots] থাকিয়া যায়। প্রদত্ত উদাহরণ হইতে বিষয়টি পরিষ্কার হইবে।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1 সমাধান কর : $\tan^2\theta+\cot^2\theta=2.$ [Pat. U. '42]

$\tan^2\theta+\cot^2\theta=2,$ or, $\tan^2\theta+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=2,$

or, $\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1=0,$ or, $(\tan^2\theta-1)^2=0,$

or, $\tan^2\theta-1=0,$ or, $\tan^2\theta=1,$

$\therefore\ \tan\theta=\pm1=\tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right),$

$\therefore\ \theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4},$ $n=0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদা. 2. সমাধান কর : $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4.$ [A. U. '51]

$7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4,$ or, $7\sin^2\theta+3(1-\sin^2\theta)=4,$

or, $4\sin^2\theta=1,$ or, $\sin^2\theta=\frac{1}{4},$

$\therefore\ \sin\theta=\pm\frac{1}{2}=\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right),$ $\therefore\ \theta=n\pi+(-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)\cdots\ \cdots$ (1)

যেখানে $n=0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

অথবা, $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4,$ or, $7(1-\cos^2\theta)+3\cos^2\theta=4,$

or, $4\cos^2\theta=3,$ or, $\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$$\left.\begin{array}{l}\text{যখন, } \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ তখন } \theta=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{6},\\ \text{এবং যখন, } \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{5\pi}{6}, \text{ তখন } \theta=2n\pi\pm\dfrac{5\pi}{6}\end{array}\right\}\cdots(2)$$

যেখানে $n=0$ বা, যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

অথবা, $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4,$

or, $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4(\sin^2\theta+\cos^2\theta),$

or, $3\sin^2\theta=\cos^2\theta,$ or, $\tan^2\theta=\frac{1}{3},$

$\therefore\ \tan\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right),$ $\therefore\ \theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}\cdots\ \cdots$ (3)

যেখানে $n=0,$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

টীকা : (i) সমাধান (1), (2) বা (3) আপাতদৃষ্টিতে পৃথক ; কিন্তু n এর মান [$n=0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots$] বসাইলে একই কোণসমূহ পাওয়া যাইবে।

(ii) উপরোক্ত উদাহরণ হইতে ইহা স্পষ্ট যে একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণকে বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক বিশিষ্ট [sine বা cosine বা tangent] সমীকরণে রূপান্তরিত করিয়া সমাধান করা যায় ; কিন্তু শেষ পর্যন্ত প্রাপ্ত ফল সর্বক্ষেত্রেই সমান হইবে।

উদা. 3. সমাধান কর : $\cot x-\tan x=2.$ [C. U. '34, '37]

$$\cot x-\tan x=2, \quad \text{or,} \quad \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=2,$$

or, $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=2,$

or, $\cos^2 x-\sin^2 x=2\sin x\cos x$, or, $\cos 2x=\sin 2x$,

or, $\tan 2x=1=\tan\frac{\pi}{4}$, $\therefore\ 2x=n\pi+\frac{\pi}{4}$,

or, $x=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots$

উদা. 4. সমাধান কর : $\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}$. [H. S. '62]

$\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}$, or, $4(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta-1=0$,

or, $4\sin^2\theta-4\sin\theta-3=0$,

or, $4\sin^2\theta-6\sin\theta+2\sin\theta-3=0$,

or, $(2\sin\theta-3)(2\sin\theta+1)=0$, $\therefore\ \sin\theta=\frac{3}{2}$, বা, $-\frac{1}{2}$. কিন্তু, $\sin\theta$ এর সাংখ্য মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না, অতএব $\sin\theta=\frac{3}{2}$ ইহা গ্রহণযোগ্য নহে।

$\therefore\ \sin\theta=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$,

$\therefore\ \theta=n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $n=0$, বা, যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদা. 5. সমাধান কর : $\tan 5\theta=\cot 2\theta$. [A. U. '43]

$\tan 5\theta=\cot 2\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$, $\therefore\ 5\theta=n\pi+\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$,

or, $7\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$, or, $\theta=\frac{n\pi}{7}+\frac{\pi}{14}$, $n=0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদা. 6. সমাধান কর : $\sin 4\theta=\sin \theta$. [B. H. U. '49]

$\sin 4\theta=\sin \theta$, or, $\sin 4\theta-\sin \theta=0$, or, $2 \cos \frac{5\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}=0$,

$\therefore \cos \frac{5\theta}{2}=0$, or, $\sin \frac{3\theta}{2}=0$,

or, $\frac{5\theta}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $\therefore \frac{3\theta}{2}=n\pi$, or, $3\theta=2n\pi$,

or, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{5}$, or, $\theta=\frac{2n\pi}{3}$.

$n=0$, বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

বিকল্প পদ্ধতি : $\sin 4\theta=\sin \theta$, $\therefore 4\theta=n\pi+(-1)^n\theta$, $n=0$, বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা। এখন, n যুগ্ম হইলে মনে কর $n=2m$,

$\therefore 4\theta=2m\pi+\theta$, or, $\theta=\frac{2m\pi}{3}$,

এবং, n অযুগ্ম হইলে মনে কর $n=2m+1$, $\therefore 4\theta=(2m+1)\pi-\theta$,

or, $\theta=(2m+1)\frac{\pi}{5}$, $m=0$, বা, যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদা. 7. সমাধান কর : $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=0$.

[C. U. '59]

$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=0$,

or, $(\cos x+\cos 7x)+(\cos 3x+\cos 5x)=0$,

or, $2 \cos 4x \cos 3x+2 \cos 4x \cos x=0$,

or, $2 \cos 4x(\cos 3x+\cos x)=0$,

or, $2 \cos 4x \,.\, 2 \cos 2x \,.\, \cos x=0$,

সুতরাং, $\cos 4x=0$......(1) or, $\cos 2x=0$... ... (2)

or, $\cos x=0$......(3)

(1) হইতে, $4x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $\therefore x=(2n+1)\frac{\pi}{8}$.

(2) „ , $2x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $\therefore x=(2n+1)\frac{\pi}{4}$.

(3) „ , $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

} $n=0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদা. 8. সমাধান কর : $\sin 5\theta \cos 3\theta = \sin 9\theta \cos 7\theta$.

[B. H. U. '46]

$\sin 5\theta \cos 3\theta = \sin 9\theta \cos 7\theta$,

or, $2 \sin 5\theta \cos 3\theta = 2 \sin 9\theta \cos 7\theta$,

or, $\sin 8\theta + \sin 2\theta = \sin 16\theta + \sin 2\theta$,

or, $\sin 16\theta - \sin 8\theta = 0$, or, $2 \cos 12\theta \sin 4\theta = 0$,

অতএব, $\cos 12\theta = 0 \cdots\cdots (1)$ or, $\sin 4\theta = 0 \cdots\cdots (2)$

(1) হইতে, $12\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{24}$

(2) হইতে, $4\theta = n\pi$, $\therefore \theta = \frac{n\pi}{4}$.

$n = 0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদা. 9. সমাধান কর : $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

[C. U. '35, B. H. U. '46]

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, [প্রদত্ত সমীকরণটি অনু: 46 এর একটি বিশেষ উদাহরণ]

$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1$,

or, $\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x = 1$,

or, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 = \cos 0$, $\therefore x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm 0$,

or, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} = (8n+1)\frac{\pi}{4}$, $n = 0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

বিকল্প পদ্ধতি : $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই, $(\sin x + \cos x)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$,

or, $\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 2$, or, $1 + \sin 2x = 2$,

or, $\sin 2x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$, $\therefore 2x = (4m+1)\frac{\pi}{2}$. [অনু. 45, (1)]

or, $x = (4m+1)\frac{\pi}{4}$, $m = 0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

m যুগ্ম হইলে মনে কর, $m = 2n$, $\therefore x = (8n+1)\frac{\pi}{4}$

m অযুগ্ম হইলে মনে কর $m = 2n+1$, $\therefore x = (8n+5)\frac{\pi}{4}$

$n = 0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

অতএব প্রথমোক্ত পদ্ধতির সমাধানের সহিত মিলাইয়া দেখা যাইতেছে যে এক্ষেত্রে একটি অতিরিক্ত বীজ, $x=(8n+5)\frac{\pi}{4}$ পাওয়া যাইতেছে। এই বীজ প্রদত্ত সমীকরণে বসাইলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না ; যেহেতু,

$$\sin(8n+5)\frac{\pi}{4}+\cos(8n+5)\frac{\pi}{4}=\sin\left(2n\pi+\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(2n\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$=\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

$\therefore$ $x=(8n+5)\frac{\pi}{4}$ বীজটি অবান্তর বীজ। এই অবান্তর বীজের উৎপত্তির কারণ এই যে, প্রকৃতপক্ষে বর্গ করিয়া সমাধান কালে $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ সমাধান না করিয়া, $(\sin x+\cos x)^2=2$. এই সমীকরণটি সমাধান করা হইতেছে এবং $(\sin x+\cos x)^2=2$ এর মধ্যে দুইটি সমীকরণ অন্তর্ভুক্ত ; $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ এবং $\sin x+\cos x=-\sqrt{2}$

আসলে $x=(8n+5)\frac{\pi}{4}$, $\sin x+\cos x=-\sqrt{2}$ এই সমীকরণের সমাধান।

অতএব প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান, $x=(8n+1)\frac{\pi}{4}$.

উদা· 10. সমাধান কর : $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0$.

[B. H. U. '46 ; A. U. '41, '50]

$\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0$,

or, $\tan x+\tan 2x+\tan(x+2x)=0$,

or, $(\tan x+\tan 2x)+\dfrac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\tan 2x}=0$,

or, $(\tan x+\tan 2x)\left(1+\dfrac{1}{1-\tan x\tan 2x}\right)=0$,

অতএব, $\tan x+\tan 2x=0\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$

or, $\quad 1+\dfrac{1}{1-\tan x \tan 2x}=0\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$

(1) হইতে, $\tan 2x=-\tan x=\tan(-x)$

$\therefore \quad 2x=n\pi-x$, or, $3x=n\pi$; $\therefore \quad x=\dfrac{n\pi}{3}$.

(2) হইতে, $1-\tan x \tan 2x+1=0$; or, $\tan x \tan 2x=2$,

or, $\tan x \cdot \dfrac{2 \tan x}{1-\tan^2 x}=2$,

or, $\tan^2 x=1-\tan^2 x$; or, $\tan^2 x=\frac{1}{2}$,

$\therefore \quad \tan x=\pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}=\tan(\pm\alpha)$, মনে কর যেখানে $\tan \alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore \quad x=n\pi\pm\alpha$.

উদা. 11. সমাধান কর : $4 \sin \theta \cos \theta=1-2\sin \theta+2 \cos\theta, 0<\theta<\pi$.
[C. U. '50]

$4 \sin \theta \cos \theta=1-2 \sin \theta+2 \cos \theta$,

or, $4 \sin \theta \cos \theta+2 \sin \theta-2 \cos \theta-1=0$,

or, $2 \sin \theta (2 \cos \theta+1)-1(2 \cos \theta+1)=0$,

or, $(2 \sin \theta-1)(2 \cos \theta+1)=0$,

অতএব, $2 \sin \theta-1=0$; or, $\sin \theta=\frac{1}{2}\cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$

অথবা, $2 \cos \theta+1=0$; or, $\cos \theta=-\frac{1}{2}\cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$

(1) হইতে, $\sin \theta=\frac{1}{2}=\sin \frac{\pi}{6}$; $\therefore \quad \theta=n\pi+(-1)^n \frac{\pi}{6}\cdots \quad \cdots \quad (3)$

(2) হইতে $\cos \theta=-\frac{1}{2}=\cos \dfrac{2\pi}{3}$; $\therefore \quad \theta=2n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$

অর্থাৎ, $\theta=2n\pi+\dfrac{2\pi}{3}\cdots \quad \cdots(4)$ বা, $\theta=2n\pi-\dfrac{2\pi}{3}\cdots \quad \cdots(5)$

(3) হইতে, $n=0, 1$ হইলে θ এর মান 0 হইতে π এর মধ্যে থাকিবে।

$$\therefore \quad \theta=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}.$$

(4) হইতে, $n=0$ হইলে θ এর মান প্রদত্ত সীমার মধ্যে থাকিবে।

$$\therefore \quad \theta=\frac{2\pi}{3}.$$

(5) হইতে θ এর কোন মান 0 হইতে π এর মধ্যে পাওয়া যায় না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

উদা. 12. $\sin A=\sin B$ এবং $\cos A=\cos B$ হইলে দেখাও যে হয় $A=B$ অথবা উহাদের অন্তর চারি সমকোণের যে কোন গুণিতক। [C. U. '35]

$\sin A=\sin B$, or, $\sin A-\sin B=0$,

$$\text{or,} \quad 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0\cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

আবার, $\cos A=\cos B$, or, $2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0\cdots \quad \cdots(2)$

(1) ও (2) উভয়ই যুগপৎ সত্য বলিয়া $\sin\frac{A-B}{2}=0$, কারণ অপর উৎপাদকদ্বয় $\cos\frac{A+B}{2}$ এবং $\sin\frac{A+B}{2}$ উভয়ই শূন্য হইতে পারে না।

$\therefore \quad \sin\frac{A-B}{2}=0$ হইতে পাই $\frac{A-B}{2}=n\pi$ বা, $A-B=2n\pi$

এখন, $n=0$ হইলে, $A=B$

এবং n শূন্য ভিন্ন যে কোন অখণ্ড সংখ্যা হইলে, $A-B=2n\pi=n\times 2\pi$

$=4$ সমকোণের যে কোন গুণিতক।

প্রশ্নমালা 9

সমাধান কর :—[1 হইতে 29]

1. $\cos\theta=-\frac{1}{2}$. **2.** $3\tan^2\theta=1$. [A. U. '56]

3. $3\sec^2\theta=4$. **4.** $\tan^2\theta=3\operatorname{cosec}^2 \text{zen}\ \theta-1$. [C. U. '39]

5. $6\cos^2 x+2\sin^2 x=3$.

6. $\sin^2\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{4} = 0.$ [A. U. '55]

7. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2.$ [C. U. '44 ; A. U. '45]

8. $\tan x + \cot x = 2.$ **9.** $\sin 2\theta = \cos 3\theta.$ [A. U. '57]

10. $\tan 3\theta = \cot\theta.$ [A. U. '48]

11. $\sin 2\theta = \cos\theta.$ [C. U. '53]

12. $2\sin 2x - \sin x = 0.$ [A. U. '54]

13. $\sin m\theta + \sin n\theta = 0.$

14. $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0.$ [A. U. '61]

15. $\sin 7x - \sin 3x - \sin x = 0.$ [Pat. U. '36]

16. $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0.$ [A. U. '32]

17. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$ [C. U. '41, '46 ; Pat. U. '41]

18. $\cos 3\theta - \cos 5\theta = \sin\theta.$ [A. U. '39]

19. $\cos\theta - \sin 3\theta = \cos 2\theta.$ [A. U. '49 ; B. H. U. '52]

20. $\cos 9x \cos 7x = \cos 5x \cos 3x.$

21. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 4.$ [C. U. '49]

22. $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1.$ [C. U. '41, '45, '48]

23. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x.$

24. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ [B. H. U. '48]

25. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$ [C. U. '47 ; B. H. U. '50. '52]

26. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}.$ [C. U. '45, '65]

27. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$ [C. U. '54]

28. $\sin\theta + 2\cos\theta = 1.$ [C. U. '33]

29. $\cos 2x + \sin 2x = 1.$ [A. U. '48]

30. সমাধান কর :

(i) $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0,\ 0 < x < 2\pi$ [Pat. U. '44]

(ii) $\cos 3\theta + \sin 2\theta = \sin 4\theta,\ 0 < \theta < \pi$ [C. U. '51]

(iii) $\sin\theta + \sin 5\theta = \sin 3\theta,\ 0 < \theta < 2\pi$ [H. S '65]

31. সমাধান কর :

(i) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$ [C. U. '38]

(ii) $\cos\theta - \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\pi < \theta < \pi$ [C. U. '52]

32. 0° হইতে 360° এর মধ্যে θ-র যে সকল মান নিম্নের সমীকরণগুলিকে সিদ্ধ করে সেইগুলি ডিগ্রীতে নির্ণয় কর :

(i) $3(\sin^2\theta + \tan^2\theta) = 5.$ [H. S. '64]

(ii) $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0.$

(iii) $\sec^2\dfrac{\theta}{2} = 2\sqrt{2}\tan\dfrac{\theta}{2}.$ [Pat. U. '42]

33. সমাধান কর :

(i) $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x.$ [C. U. '43]

(ii) $\cos x - \sin x = \cos\alpha + \sin\alpha.$ [B. H. U. '38]

(iii) $4\sin 4\theta + 1 = \sqrt{5}.$ [C. U.]

(iv) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2x} + \dfrac{\cos\alpha}{\cos 2x} = 2.$ [C. U. '58]

34. $\tan ax - \tan bx = 0$ হইলে দেখাও যে, x এর মানগুলি একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে। [C. U. '51]

35. সমাধান কর (সাধারণ সমাধান নির্ণয় করিবার প্রয়োজন নাই) :—

$$\left.\begin{array}{r}\tan x + \tan y = 2 \\ 2\cos x\cos y = 1\end{array}\right\}$$ [C. U. '55]

দশম অধ্যায়

বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক

(Inverse Circular Functions)

47. $\sin\theta = x$ এই সম্বন্ধের অর্থ এই যে θ এরূপ কোণ যাহার sine-এর মান x এর সমান। ওই সম্বন্ধটিকেই বিপরীতক্রমে $\sin^{-1} x = \theta$ এইরূপ প্রতীকচিহ্নে প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় "সাইন ইন্‌ভার্স x" (sine inverse x) বা "আর্ক সাইন x" (arc sine x)। সুতরাং $\sin^{-1} x$ এই প্রতীকচিহ্নের দ্বারা এরূপ কোণ বুঝান হয় যাহার sine-এর মান x. যেহেতু কোন কোণের sine এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না; অতএব $-1 \leqslant x \leqslant +1$ না হইলে $\sin^{-1} x$ এই প্রতীকচিহ্নটি অর্থহীন হইয়া পড়ে।

ওইরূপে $\cos^{-1} x \; (-1 \leqslant x \leqslant 1)$ দ্বারা বুঝায় এরূপ একটি কোণ যাহার cosine এর মান x এর সমান। $\tan^{-1} x$ (x এর যে কোন মানের জন্য) বুঝায় এরূপ একটি কোণ যাহার tangent এর মান x; ইত্যাদি। স্পষ্টতই $\operatorname{cosec}^{-1} x$ এবং $\sec^{-1} x$ এর ক্ষেত্রে $-1 \geqslant x$, $x \geqslant 1$ এবং $\cot^{-1} x$ এর ক্ষেত্রে x এর যে কোন মান হইতে পারে।

$\sin\theta\; [=x]$ একটি ত্রিকোণমিতিক বা বৃত্তীয় অপেক্ষক (Trigonometric বা Circular Function)। সেইজন্য বিপরীতক্রমে প্রকাশিত সম্বন্ধ $\sin^{-1} x\; [=\theta]$ কে বলা হয় বিপরীত বৃত্তীয় বা ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক (Inverse Circular or Trigonometric Function)। $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\operatorname{cosec}^{-1} x$, $\sec^{-1} x$, $\cot^{-1} x$ সবগুলিই বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক।

অতএব $\sin\theta = x$ এবং $\theta = \sin^{-1} x$ সমীকরণ দুইটি এই অর্থে অভিন্ন যে, উহারা একই ফলকে বিভিন্ন আকারে প্রকাশ করে এবং উহাদের যে কোন একটি দেওয়া থাকিলে অপরটি সহজেই নির্ণয় করা যায়।

টীকাঃ (1) $\sin^{-1} x$ এ ব্যবহৃত -1 ঘাতের সূচক জ্ঞাপক নহে; অর্থাৎ $\sin^{-1} x$ ও $(\sin x)^{-1}$ এর অর্থ এক নহে। $(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ = একটি সংখ্যা এবং $\sin^{-1} x$ একটি কোণ। যদিও $(\sin x)^3 = \sin^3 x$ এইরূপ লেখা হয়; কিন্তু

ঘাতের সূচক -1 এর ক্ষেত্রেই কেবল ওই লিখন পদ্ধতির ব্যতিক্রম করা হয় এবং লেখা হয় $(\sin x)^{-1}$.

(2) $\sin^{-1} x$ একটি কোণ যেখানে x একটি সংখ্যা ; কিন্তু $\sin x$ একটি সংখ্যা যেখানে x একটি কোণ।

48. মুখ্যমান (Principal value)

বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলি বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক (Multiple valued function)। $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ এই অপেক্ষকটির বিষয়েই আলোচনা করা যাক। আমরা জানি যে এমন অসংখ্য কোণ আছে যাহাদের sine এর মান $\frac{1}{2}$. বস্তুত $n\pi+(-1)^n \frac{\pi}{6}$ [$n=0$ বা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা] দ্বারা প্রকাশিত সকল কোণের sine এর মান $\frac{1}{2}$ [অনু : 42]। সুতরাং $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ এর মান অসংখ্য। এইরূপে $\sin^{-1} x$ [$-1 \leqslant x \leqslant 1$] বহুমান বিশিষ্ট। সেই রকম $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, ইত্যাদি অপরাপর বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলিও **বহুমান বিশিষ্ট।**

যে কোন বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক বা ঋণাত্মক মানটিকে ঐ অপেক্ষকের **মুখ্যমান** বলে। যেমন, $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{6}$ এবং $\tan^{-1}(-1)$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{4}$.

যদি কোন অপেক্ষকের (যেমন $\cos^{-1} x$ বা $\sec^{-1} x$) একই সাংখ্যমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট দুইটি ক্ষুদ্রতম মান হয় তবে **ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক** মানটিকেই ঐ অপেক্ষকের মুখ্যমান ধরিতে হইবে। যেমন, $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$ নয় ; যদিও $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

টীকা : $\tan^{-1} 1=135°$ ধরনের সমতার সম্পর্ক বিভ্রান্তির সৃষ্টি করিতে পারে ; কেননা সম্পর্কটির বামপক্ষ বহুমানবিশিষ্ট রাশি কিন্তু দক্ষিণপক্ষের একটি মাত্র নির্দিষ্ট মান। মনে রাখিতে হইবে, ওই ধরণের সমতার সম্পর্ক কেবলমাত্র ইহাই প্রকাশ করে যে বামপক্ষের অসংখ্য মানের মধ্যে একটি মান দক্ষিণপক্ষের সমান।

অনুরূপে, দুই বা তাহার অধিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের মধ্যে কোন সমতার সম্পর্ক থাকিলে ; ওই সম্পর্ক হইতে ইহাই প্রকাশ পায় যে, কোন একটি পক্ষের যে কোন একটি মান অপর পক্ষের কোন একটি মানের সমান।

49. কতিপয় সিদ্ধান্ত।

(1) মনে কর, $\sin^{-1} x=\theta$, তাহা হইলে, $\sin \theta=x$,

$\therefore \sin (\sin^{-1} x)=x$, অর্থাৎ, $\mathbf{\sin \sin^{-1} x=x.}$

অনুরূপে, $\mathbf{\cos \cos^{-1}x=x, \tan \tan^{-1} x=x,}$

$\mathbf{\text{cosec}\, \text{cosec}^{-1}x=x, \sec \sec^{-1}x=x, \cot \cot^{-1} x=x.}$

টীকা: যদিও $\sin^{-1} x$ বহুমানবিশিষ্ট, কিন্তু $\sin \sin^{-1} x$ এর একটিই মান, x.

(2) মনে কর $\sin \theta=x$, তাহা হইলে $\sin^{-1} x=\theta$,

$\therefore \sin^{-1} (\sin \theta)=\theta$

অর্থাৎ, $\mathbf{\sin^{-1} \sin \theta=\theta}$

অনুরূপে, $\mathbf{\cos^{-1} \cos \theta=\theta, \tan^{-1} \tan \theta=\theta}$ ইত্যাদি।

(3) প্রমাণ করিতে হইবে,

$$\mathbf{\sin^{-1} x=\text{cosec}^{-1} \frac{1}{x}, \cos^{-1} x=\sec^{-1} \frac{1}{x}, \tan^{-1} x=\cot^{-1} \frac{1}{x}}$$

মনে কর, $\sin^{-1} x=\theta$, তাহা হইলে $\sin \theta=x$, $\therefore \text{cosec}\, \theta=\frac{1}{x}$,

$$\therefore \theta=\text{cosec}^{-1} \frac{1}{x} \text{ অর্থাৎ, } \sin^{-1} x=\text{cosec}^{-1} \frac{1}{x}.$$

অনুরূপে, $\cos^{-1} x=\sec^{-1} \frac{1}{x}$

এবং $\tan^{-1} x=\cot^{-1} \frac{1}{x}$ প্রমাণ করা যায়।

উপরের ফলগুলি হইতে ইহাই জানা যায় যে, বামপক্ষের যে কোন একটি মান দক্ষিণপক্ষের কোন একটি মানের সমান।

(4) ত্রিকোণমিতিক অর্থাৎ বৃত্তীয় অপেক্ষকের ক্ষেত্রে যেমন একটিকে অপরটির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়; তেমনই বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকেরও যে কোন একটিকে অপর যে কোনটির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যেমন,

$\cos^{-1} x=\theta$ হইলে $\cos \theta=x$, $\therefore \sin \theta=\pm \sqrt{1-x^2}$;

$$\tan \theta=\frac{\pm x}{\sqrt{1-x^2}}, \cot \theta=\frac{\pm \sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\sec \theta=\frac{1}{x}, \text{cosec}\, \theta=\frac{1}{\pm \sqrt{1-x^2}},$$

$$\therefore\ \cos^{-1} x=\sin^{-1}\pm\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{\pm x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\cot^{-1}\frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x}=\sec^{-1}\frac{1}{x}$$

$$=\text{cosec}^{-1}\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

(5) প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\sin^{-1} x+\cos^{-1} x=\frac{\pi}{2}$.

(ii) $\tan^{-1} x+\cot^{-1} x=\frac{\pi}{2}$.

(iii) $\text{cosec}^{-1} x+\sec^{-1} x=\frac{\pi}{2}$.

প্রমাণ : (i) মনে কর, $\sin^{-1} x=\theta$, তাহা হইলে, $\sin\theta=x$.

এখন, $\because\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,\quad \therefore\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x,$

$\therefore\ \cos^{-1} x=\frac{\pi}{2}-\theta.$

$\therefore\ \sin^{-1} x+\cos^{-1} x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}.$

উপরোক্ত সম্পর্কটির অর্থ এই যে, $\sin^{-1} x$ এর যে কোন একটি মান এবং $\cos^{-1} x$ এর কোন একটি মানের সমষ্টি $\frac{\pi}{2}$ যেমন, $\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$ এই সম্পর্কের ক্ষেত্রে, $\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ এবং, $\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$ হইতে পারে ; আবার, $\sin^{-1}\frac{1}{2}=150^\circ$, এবং, $\cos^{-1}\frac{1}{2}=-60^\circ$ হইতে পারে।

(i) এর অনুরূপে, (ii) ও (iii) প্রমাণ করা যায়।

টীকা : বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির সকল সম্পর্কই অপেক্ষকগুলির মুখ্যমানের ক্ষেত্রে সর্বদা সত্য।

(6) প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\tan^{-1} x+\tan^{-1} y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$.

(ii) $\tan^{-1} x-\tan^{-1} y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$.

প্রমাণঃ মনে কর, $\tan^{-1}x=\alpha$, এবং, $\tan^{-1}y=\beta$,

$\therefore$ $\tan\alpha=x$, এবং, $\tan\beta=y$,

(i) $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x+y}{1-xy};$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy},$$

অর্থাৎ, $$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}.$$

(ii) $$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x-y}{1+xy};$$

$$\therefore\ \alpha-\beta=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}.$$

অর্থাৎ, $$\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}.$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $$\cot^{-1}x\pm\cot^{-1}y=\cot^{-1}\frac{xy\mp1}{y\pm x}.$$

(7) প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\mathbf{\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}}.$$

প্রমাণঃ মনে কর, $\tan^{-1}x=\alpha$, $\tan^{-1}y=\beta$, $\tan^{-1}z=\gamma$.

$\therefore$ $\tan\alpha=x$, $\tan\beta=y$, $\tan\gamma=z$.

এখন, $$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy};$$

$$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy};$$

অর্থাৎ, $$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

অনুসি. $y=z=x$ ধরিলে উপরোক্ত সূত্র হইতে পাওয়া যায়,

$$3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}.$$

(8) প্রমাণ করিতে হইবে,

$$2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$$

প্রমাণ : মনে কর, $\tan^{-1}x=\theta$, $\therefore\ \tan\theta=x$.

এখন, $\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ [অনু. 30]

$$=\frac{2x}{1+x^2}\quad \therefore\ 2\theta=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2},$$

অর্থাৎ, $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$.

$$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-x^2}{1+x^2},\quad \therefore\ 2\theta=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2},$$

অর্থাৎ, $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},$$

$$=\frac{2x}{1-x^2},\quad \therefore\ 2\theta=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2},$$

অর্থাৎ $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

(9) প্রমাণ করিতে হইবে,

(i) $\sin^{-1}x\pm\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\}$

(ii) $\cos^{-1}x\pm\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

প্রমাণ : (i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\alpha$,

$\therefore\ \sin\alpha=x$, এবং, $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$.

এবং, $\sin^{-1}y=\beta$, $\therefore\ \sin\beta=y$, এবং, $\cos\beta=\sqrt{1-y^2}$.

এখন, $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$$=x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2},$$

$\therefore\ \alpha\pm\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\}$

অর্থাৎ, $\sin^{-1}x\pm\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\}$

(ii) মনে কর, $\cos^{-1}x=\alpha$, $\therefore$ $\cos\alpha=x$, $\sin\alpha=\sqrt{1-x^2}$.

এবং $\cos^{-1}y=\beta$, $\therefore$ $\cos\beta=y$, $\sin\beta=\sqrt{1-y^2}$,

এখন, $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$$=xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\ ;$$

$\therefore$ $\alpha\pm\beta=\cos^{-1}\{xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

অর্থাৎ, $\cos^{-1}x\pm\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

(10) প্রমাণ করিতে হইবে,

(i) $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

(ii) $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$.

প্রমাণ : (i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$,

$\therefore$ $\sin\theta=x$, $\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$.

এখন, $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2x\sqrt{1-x^2}$;

$\therefore$ $2\theta=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$,

অর্থাৎ, $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

(ii) মনে কর, $\cos^{-1}x=\theta$, $\therefore$ $\cos\theta=x$,

এখন, $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2x^2-1$;

$\therefore$ $2\theta=\cos^{-1}(2x^2-1)$,

অর্থাৎ, $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$.

টীকা : (9) এর সূত্রে, $y=x$ বসাইয়াও, (10) এর সূত্র প্রমাণ করা যায়।

(11) প্রমাণ করিতে হইবে,

(i) $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$.

(ii) $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$.

(iii) $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

প্রমাণ : (i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$, $\therefore$ $\sin\theta=x$,

এখন, $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3x-4x^3$;

$\therefore$ $3\theta=\sin^{-1}(3x-4x^3)$;

অর্থাৎ, $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$.

(ii) ও (iii), (i) এর অনুরূপে প্রমাণ করা যায়।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$-এর মুখ্যমান নির্ণয় কর।

মনে কর, $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})=\theta, \quad \therefore \quad \operatorname{cosec}\theta=-\sqrt{2}$;

or, $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad \therefore \quad \theta=-\frac{\pi}{4}.$

$\therefore$ $\operatorname{cosec}^{-1}(\sqrt{2})$-এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{4}$.

উদা. 2. প্রমাণ কর, $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{32}{43}.$

[C. U. '51, H. S. '65]

$2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}=\tan^{-1}\frac{5}{12}.$ [অনু : 49, (8)]

$\therefore$ বামপক্ষ $=\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{1}{4}}=\tan^{-1}\frac{32}{43}.$

উদা. 3. প্রমাণ কর, $\cot^{-1}\frac{xy+1}{x-y}+\cot^{-1}\frac{yz+1}{y-z}+\cot^{-1}\frac{zx+1}{z-x}=0.$

বামপক্ষ $=\cot^{-1}y-\cot^{-1}x+\cot^{-1}z-\cot^{-1}y+\cot^{-1}x-\cot^{-1}z=0.$

উদা. 4. প্রমাণ কর, $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}.$

[C. U. '41]

মনে কর, $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\alpha, \quad \therefore \quad \sin\alpha=\frac{4}{5},$

$\therefore \quad \cos\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}.$

$\therefore \quad \tan\alpha=\frac{4}{3}, \qquad$ or, $\alpha=\tan^{-1}\frac{4}{3}.$

এবং, $\sin^{-1}\frac{5}{13}=\beta, \quad \therefore \quad \sin\beta=\frac{5}{13},$

$\therefore \quad \tan\beta=\frac{5}{12},$ or, $\beta=\tan^{-1}\frac{5}{12}.$

এবং, $\sin^{-1}\frac{16}{65}=\gamma$, $\therefore$ $\sin\gamma=\frac{16}{65}$,

$\therefore$ $\tan\gamma=\frac{16}{63}$, or, $\gamma=\tan^{-1}\frac{16}{63}$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

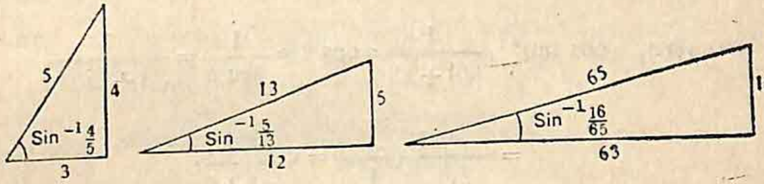
$$=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{5}{12}}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$$

$$=\tan^{-1}\frac{63}{16}+\cot^{-1}\frac{63}{16}=\frac{\pi}{2}.$$ [অনু : 49 (5)]

বিকল্প পদ্ধতি : চিত্রানুসারে, $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\tan^{-1}\frac{4}{3}$.

$\sin^{-1}\frac{5}{13}=\tan^{-1}\frac{5}{12}$.

এবং, $\sin^{-1}\frac{16}{65}=\tan^{-1}\frac{16}{63}$.



চিত্র 22

$\therefore$ বামপক্ষ $=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

$=\tan^{-1}\frac{63}{16}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

$=\tan^{-1}\frac{63}{16}+\cot^{-1}\frac{63}{16}$

$=\frac{\pi}{2}$.

টীকা : চিত্রের সাহায্যে বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের প্রার্থিত রূপান্তর সহজসাধ্য।

উদা. 5. প্রমাণ কর, $\sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)=15$.

[C. U. '56]

মনে কর, $\tan^{-1}2=\alpha$, $\therefore$ $\tan\alpha=2$.

এবং, $\cot^{-1}3=\beta$, $\therefore$ $\cot\beta=3$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\beta=1+\tan^2\alpha+1+\cot^2\beta$,

$=1+4+1+9=15$.

উদা. 6. প্রমাণ কর, $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$.

[C. U. '53 ; A. U. '50]

মনে কর, $\cot^{-1}x=\alpha$; $\therefore$ $\cot\alpha=x$,

তাহা হইলে, $\sin\cot^{-1}x=\sin\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=\cos\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

এখন মনে কর, $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\beta$, $\therefore$ $\tan\beta=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

তাহা হইলে, $\cos\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\cos\beta=\dfrac{1}{\sec\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{1+x^2}}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}},$$

$\therefore$ $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$.

উদা. 7. প্রমাণ কর : $\tan^{-1}\left(\dfrac{3\sin 2\theta}{5+3\cos 2\theta}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\tan\theta\right)=\theta$.

[C. U. '49]

$$\frac{3\sin 2\theta}{5+3\cos 2\theta}=\frac{3\cdot\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}}{5+3\cdot\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}=\frac{\frac{6\tan\theta}{1+\tan^2\theta}}{\frac{5+5\tan^2\theta+3-3\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}$$

$$=\frac{6\tan\theta}{8+2\tan^2\theta}=\frac{3\tan\theta}{4+\tan^2\theta}.$$

$\therefore$ বামপক্ষ $=\tan^{-1}\dfrac{3\tan\theta}{4+\tan^2\theta}+\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\tan\theta\right)$

$$=\tan^{-1}\frac{\dfrac{3\tan\theta}{4+\tan^2\theta}+\dfrac{\tan\theta}{4}}{1-\dfrac{3\tan\theta}{4+\tan^2\theta}\times\dfrac{\tan\theta}{4}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\dfrac{12\tan\theta+4\tan\theta+\tan^3\theta}{4(4+\tan^2\theta)}}{\dfrac{16+4\tan^2\theta-3\tan^2\theta}{4(4+\tan^2\theta)}}=\tan^{-1}\tan\theta=\theta.$$

উদা. 8. $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ হইলে দেখাও যে,

$x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$ [C. U. '41]

$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi,$

or, $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\pi-\cos^{-1}z,$

or, $\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}=\pi-\cos^{-1}z,$

$\therefore$ $\cos(\pi-\cos^{-1}z)=xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$;

or, $-\cos\cos^{-1}z=xy-\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2},$

or, $-z=xy-\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2},$

or, $xy+z=\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2},$

or, $x^2y^2+z^2+2xyz=1-x^2-y^2+x^2y^2,$ [উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া]

$\therefore$ $x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$

উদা. 9. সমাধান কর : $\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x}=\tan^{-1}(-7).$

[B. H. U. '57]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $\tan^{-1}\dfrac{\dfrac{x^2+x+x^2-2x+1}{x(x-1)}}{\dfrac{x^2-x-x^2+1}{x(x-1)}}=\tan^{-1}(-7),$

or, $\tan^{-1}\dfrac{2x^2-x+1}{1-x}=\tan^{-1}(-7),$

$\therefore$ $\dfrac{2x^2-x+1}{1-x}=-7,$ or, $2x^2-x+1+7-7x=0,$

or, $2x^2-8x+8=0,$ or, $x^2-4x+4=0,$

or, $(x-2)^2=0,$ or, $x=2.$

উদা. 10. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{2}{3}\pi \\ \text{এবং } \cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\frac{1}{3}\pi\end{array}\right\}$ ... ...(1) ... ...(2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া, $(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x)+\sin^{-1}y-\cos^{-1}y=\pi$,

or, $\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}y-\cos^{-1}y=\pi$,

or, $\sin^{-1}y-\cos^{-1}y=\frac{\pi}{2}$,

or, $\sin^{-1}y-\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}y\right)=\frac{\pi}{2}$, $\left[\because \sin^{-1}y+\cos^{-1}y=\frac{\pi}{2}\right]$

or, $2\sin^{-1}y=\pi$, or, $\sin^{-1}y=\frac{\pi}{2}$, $\therefore$ $y=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

আবার, (1) হইতে, $\sin^{-1}x+\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$, $\left[\therefore \sin^{-1}y=\frac{\pi}{2}\right]$

or, $\sin^{-1}x=\frac{\pi}{6}$, $\therefore$ $x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ y=1\end{array}\right\}$

প্রশ্নমালা 10

1. মুখ্যমান নির্ণয় কর :

(i) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$; (ii) $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$; (iii) $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$;

(iv) $\sec^{-1}2$; (v) $\text{cosec}^{-1}(-2)$; (vi) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

(vii) $\cot^{-1}(-1)$.

2. অন্যান্য বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের মাধ্যমে প্রকাশ কর :

(i) $\tan^{-1}x$,

3. মান নির্ণয় কর : $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2})$. [C. U. '35]

প্রমাণ কর [4 হইতে 19] :

4. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

5. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$. [C. U. '37, B. H. U. '52]

6. $4(\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$. [C. U. '39]

7. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$. [B. H. U. '48]

8. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{2}{11}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}$. [C. U. '50]

9. $2\cot^{-1}5+\cot^{-1}7+2\cot^{-1}8=\frac{\pi}{4}$. [C. U. '58]

10 $\cos^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}+\cos^{-1}\frac{63}{65}=\frac{\pi}{2}$.

11. $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=2(\tan^{-1}1+\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3})$.

12. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=\frac{\pi}{4}$.

[B. H. U. '52]

13. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

[C. U. '42, '52, '55]

14. $\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}+\tan^{-1}\frac{y-z}{1+yz}=\tan^{-1}x-\tan^{-1}z$.

[C. U. '55]

15. $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}$

$=\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}+\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2}$.

[Pat. U. '31]

16. $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)=\tan^{-1}(1+x+x^2)$.

[C. U. '58, '60]

17. $\tan^{-1}\frac{1}{a+b}+\tan^{-1}\frac{b}{a^2+ab+1}=\tan^{-1}\frac{1}{a}$. [C. U. '49]

18. $\sin\operatorname{cosec}^{-1}\cot\tan^{-1}x=x$. [B. H. U. '49]

19. $\tan^{-1}x=2\tan^{-1}\{\operatorname{cosec}(\tan^{-1}x)-\tan(\cot^{-1}x)\}$.

[C. U. '45]

20. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ হইলে দেখাও যে,

$x+y+z=xyz.$ [C. U. '52]

21. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$ হইলে দেখাও যে, $\frac{x+y}{1-xy}=\frac{1}{z}.$

[Bur. U. '65]

22. $A+B+C=\pi$ এবং, $A=\tan^{-1} 2$, $B=\tan^{-1} 3$ হইলে প্রমাণ কর, $C=\frac{\pi}{4}.$ [C. U. '51]

সমাধান কর [23 হইতে 33]:

23. $\sin^{-1}x=\cos^{-1}x.$

24. $\cot^{-1}x+\tan^{-1} 3=\frac{\pi}{2}.$ [C. U. '50]

25. $\tan^{-1} 2x+\tan^{-1} 3x=\frac{\pi}{4}.$ [A. U. '49]

26. $\sin^{-1}\frac{5}{x}+\sin^{-1}\frac{12}{x}=\frac{\pi}{2}.$ [C. U. '14]

27. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1-x)=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}.$

28. $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}.$ [C. U. '47, '53]

29. $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1} 3x.$

[C. U. '46]

30. $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x.$ [C. U. '47]

31. $\tan^{-1}\frac{1}{1+2x}+\tan^{-1}\frac{1}{4x+1}=\tan^{-1}\frac{2}{x^2}.$

32. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{6}+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}.$ [C. U. '49]

33. $3\tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}}-\tan^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}\frac{1}{3}.$ [Pat. U. '50]

[ইঙ্গিত: $3\tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}}=3\tan^{-1}\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=3\tan^{-1}(2-\sqrt{3})=3\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}=\tan^{-1} 1.$]

প্রমাণ কর [34 হইতে 38] :

34. $\tan\left\{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\}=\frac{2x}{1-x^2}$. [C. U. '47]

35. $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2A)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3 A)=0$.

[C. U. '48, '57, '59]

36. $\cos^{-1}\left\{\frac{\cos x+\cos y}{1+\cos x\cos y}\right\}=2\tan^{-1}(\tan\frac{1}{2}x\tan\frac{1}{2}y)$.

[C.U. '46]

37. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{xr}{yz}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{yr}{zx}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{zr}{xy}}=\pi$

যেখানে, $x+y+z=r$. [C. U. '35]

38. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)=\frac{2b}{a}$.

[C. U. '43]

39. $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\theta$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\theta+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta.$$ [C. U.]

40. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$ হইলে দেখাও যে,

$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz$.

[C. U. '37 ; Pat. U. '49]

একাদশ অধ্যায়

ত্রিভুজের ধর্ম

(Properties of Triangles)

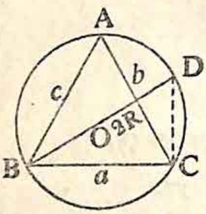
50. এই অধ্যায়ে ত্রিভুজের বাহু, কোণ, ক্ষেত্রফল, পরিব্যাসার্ধ (circum-radius), অন্তর্ব্যাসার্ধ (in-radius), বহির্ব্যাসার্ধ (ex-radius) গুলির মধ্যে সম্বন্ধ সূচক সূত্রাবলী লইয়া আলোচনা করা হইবে।

যে কোন ত্রিভুজ ABC-র ছয়টি অংশ আছে ; তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ। তিনটি কোণ BAC, CBA ও ACB-কে যথাক্রমে A, B ও C দ্বারা এবং উহাদের বিপরীত বাহুত্রয় BC, CA ও AB-কে যথাক্রমে, a, b ও c দ্বারা সূচিত করা হয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে Δ [কখনও কখনও S] এবং পরিব্যাসার্ধকে R দ্বারা সূচিত করা হয়।

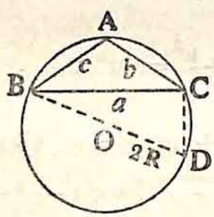
51. সাইন বিধি (Sine Rule)।

যে কোন ত্রিভুজ ABC তে,

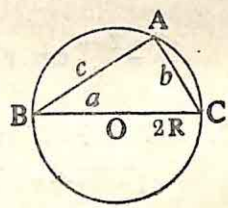
$$\frac{\mathbf{a}}{\sin \mathbf{A}}=\frac{\mathbf{b}}{\sin \mathbf{B}}=\frac{\mathbf{c}}{\sin \mathbf{C}}=\mathbf{2R}.$$



চিত্র (i)



চিত্র (ii)



চিত্র (iii)

চিত্র 23

মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ R. (i) নং চিত্রে ABC সূক্ষ্মকোণী ; (ii) নং চিত্রে ABC স্থূলকোণী, A কোণ স্থূলকোণ এবং (iii) নং চিত্রে ABC সমকোণী, A কোণ সমকোণ।

চিত্র (i) ও (ii)-এ BO যোগ করিয়া বর্ধিত কর। মনে কর বর্ধিত BO পরিবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। CD যোগ কর। তাহা হইলে BD=2R, উভয় চিত্রেই $\angle$BCD$=1$ সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া]।

চিত্র (i)-এ, $\angle$A$=\angle$D [একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া]।

$\therefore\ \sin$ A$=\sin$ D.

এবং চিত্র (ii)-এ, $\angle A + \angle D = \pi$. [ABDC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া]

$\therefore \quad \angle A = \pi - \angle D, \quad \therefore \quad \sin A = \sin(\pi - D) = \sin D.$

অতএব উভয় চিত্রেই, BCD ত্রিভুজ হইতে পাই,

$$\sin BDC = \frac{BC}{BD},$$

$$\text{অর্থাৎ,} \quad \sin A = \frac{a}{2R}, \quad \text{or,} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

(iii) নং চিত্রে পরিকেন্দ্র O, BC-এর উপর অবস্থিত। সুতরাং এক্ষেত্রে $a = 2R$.

$$\therefore \quad \sin A = \sin 90^\circ = 1 = \frac{a}{a} = \frac{a}{2R}; \quad \text{or,} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R;$$

সুতরাং সকলক্ষেত্রেই, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R.$

এইরূপে, AO এবং CO বর্ধিত করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, এবং $\dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

অনুসি. $\because \quad \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}; \quad \therefore \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B},$

এইরূপে, $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$, এবং $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin A}{\sin C}.$

অর্থাৎ বাহুগুলি উহাদের বিপরীত কোণের সাইনের সমানুপাতী (the sides are proportional to the sines of the opposite angles.)।

52. কোসাইন বিধি (Cosine Rule): ত্রিভুজের কোণগুলির cosine-কে উহার বাহুগুলির মাধ্যমে প্রকাশ।

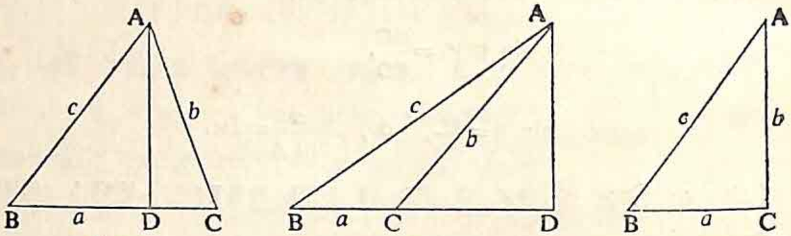
যে কোন ত্রিভুজ ABC তে,

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad \text{or,} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.}$$

$$\mathbf{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \quad \text{or,} \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}.}$$

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \quad \text{or,} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.}$$

মনে কর, ABC যে কোন ত্রিভুজ। চিত্র (i) এ ABC সূক্ষ্মকোণী, ∴ C কোণ সূক্ষ্মকোণ। চিত্র (ii) ABC স্থূলকোণী, C কোণ স্থূলকোণ এবং চিত্র (iii) এ ABC সমকোণী, C কোণ সমকোণ।



চিত্র (i) চিত্র (ii) চিত্র (iii)

চিত্র 24

Case I. চিত্র (i) এ A হইতে BC-র উপর AD লম্ব অঙ্কন কর। মনে কর, $CD=x \quad \therefore \; BD=a-x$,

এখন, $AB^2=AD^2+BD^2=AC^2-CD^2+BD^2$;

or, $c^2=b^2-x^2+(a-x)^2=b^2-x^2+a^2+x^2-2ax$,

or, $c^2=a^2+b^2-2ax$

$=a^2+b^2-2a.b\cos C$

$=a^2+b^2-2ab.\cos C$

$\triangle$ ACD হইতে, $\dfrac{x}{b}=\cos C$;

$\therefore \; x=b\cos C$.

Case II. চিত্র (ii)-এ A হইতে বর্ধিত BC-র উপর AD লম্ব অঙ্কন কর। মনে কর, $CD=x, \; \therefore \; BD=a+x$.

এখন, $AB^2=AD^2+BD^2=AC^2-CD^2+BD^2$;

or, $c^2=b^2-x^2+(a+x)^2=b^2-x^2+a^2+x^2+2ax$.

$=a^2+b^2+2ax$

$=a^2+b^2+2a(-b\cos C)$

$=a^2+b^2-2ab.\cos C$.

$\triangle$ ACD হইতে,

$\dfrac{x}{b}=\cos ACD=\cos(\pi-C)$

$=-\cos C$

$\therefore \; x=-b\cos C$.

Case III. চিত্র (iii)-এ $C=90°$ বলিয়া, $\cos C=\cos 90°=0$.

এখন, $AB^2=BC^2+AC^2$.

or, $c^2=a^2+b^2=a^2+b^2-0=a^2+b^2-2ab.\cos C$,

সুতরাং সকলক্ষেত্রেই, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

$$\text{or,} \quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

অনুরূপে অপর দুইটি সূত্রও প্রমাণ করা যায়।

অনুসি $\because \frac{a}{\sin A}=2R, \quad \therefore \sin A=\frac{a}{2R}.$

এবং $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \therefore \tan A=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{b^2+c^2-a^2}.$

অনুরূপে, $\tan B=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{c^2+a^2-b^2},$

এবং $\tan C=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{a^2+b^2-c^2}.$

53. যে কোন ত্রিভুজ ABC তে,

$$\mathbf{a=b\cos C+c\cos B}$$
$$\mathbf{b=c\cos A+a\cos C}$$
$$\mathbf{c=a\cos B+b\cos A}$$

মনে কর, ABC যে কোন ত্রিভুজ। চিত্র (i) এ C কোণ সূক্ষ্মকোণ, (ii) এ স্থূলকোণ এবং (iii) এ সমকোণ [অনুঃ 52 এর চিত্র দ্রষ্টব্য।] A হইতে BC বা বর্ধিত BC-র উপর লম্ব AD অঙ্কন কর।

Case I. (i) নং চিত্রে, $a=BC=BD+CD.$

এখন $\triangle$ ABD হইতে, $\frac{BD}{c}=\cos B, \quad \therefore BD=c\cos B.$

এবং $\triangle$ ACD হইতে, $\frac{CD}{b}=\cos C, \quad \therefore CD=b\cos C.$

$\therefore a=c\cos B+b\cos C.$

Case II. চিত্র (ii) এ, $a=BC=BD-CD$

এখন $\triangle$ ABD হইতে, $\frac{BD}{c}=\cos B, \quad \therefore BD=c\cos B,$

এবং $\triangle$ ACD হইতে, $\frac{CD}{b}=\cos ACD=\cos(\pi-C)=-\cos C,$

$\therefore CD=-b\cos C.$

$\therefore a=c\cos B+b\cos C.$

Case III. $\because C=90°, \quad \therefore \cos C=\cos 90°=0.$

এখন, $\frac{a}{c}=\cos B$, or, $a=c\cos B=c\cos B+0=c\cos B+b\cos C.$

সুতরাং সকল ক্ষেত্রেই $a=b\cos C+c\cos B.$

অনুরূপে অপর সূত্র দুইটিও প্রমাণ করা যায়।

বিকল্প প্রমাণ ঃ 52 নং অনুচ্ছেদে প্রমাণিত সূত্র হইতে পাই,

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \text{ এবং } \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$\therefore \quad b\cos C+c\cos B=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2+c^2+a^2-b^2}{2a}=\frac{2a^2}{2a}=a.$$

অনুরূপে অন্য দুইটি সূত্রও প্রমাণ করা যায়।

54. ত্রিভুজের বাহুগুলির দ্বারা অর্ধকোণগুলির কোণানুপাত নির্ণয় (Trigonometrical ratios of half angles of a triangle in terms of the sides.)।

যে কোন ত্রিভুজ ABC-তে

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

[s ত্রিভুজের অর্ধ পরিসীমা, অর্থাৎ $2s=a+b+c$.]

প্রমাণ : $\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$,

$$\therefore \quad 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{2bc}$$

$$= \frac{(2s-2c)(2s-2b)}{2bc}$$

$$= \frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$\therefore \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

[$\because$ $\frac{A}{2}$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ $\therefore$ $\sin\frac{A}{2}$ ধনাত্মক। সুতরাং ধনাত্মক বর্গমূলটি গ্রহণ করিয়া।]

অনুরূপে $\sin\frac{B}{2}$ ও $\sin\frac{C}{2}$ এর সূত্র দুইটি প্রমাণ করা যায়।

আবার. $\because$ $\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$,

$$\therefore \quad 2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s.2(s-a)}{2bc},$$

$$[\because \ a+b+c=2s.]$$

$$= \frac{2s(s-a)}{bc},$$

$$\therefore \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

[$\because$ $\frac{A}{2}$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ বলিয়া $\cos\frac{A}{2}$ ধনাত্মক। সুতরাং ধনাত্মক বর্গমূলটি গ্রহণ করিয়া।]

অনুরূপে $\cos\frac{B}{2}$ এবং $\cos\frac{C}{2}$ এর সূত্র দুইটিও প্রমাণ করা যায়।

আবার, $\tan\frac{A}{2} = \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}} \div \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

অনুরূপে, $\tan\frac{B}{2}$ এবং $\tan\frac{C}{2}$ এর সূত্র দুইটি প্রমাণ করা যায়।

55. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল প্রকাশক সূত্র।

মনে কর, ABC যে কোন ত্রিভুজ এবং উহার ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত করা হইতেছে। [52 নং অনুচ্ছেদের চিত্র দেখ।]

(i) নং চিত্রে C কোণ সূক্ষ্মকোণ,

$\Delta =$ অর্ধভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2}$ BC . AD $= \frac{1}{2} a \cdot b \sin C$.

[$\because$ Δ ACD হইতে $\frac{AD}{b} = \sin C$ $\therefore$ AD $= b \sin C$.

(ii) নং চিত্রে C কোণ স্থূলকোণ,

$\Delta = \frac{1}{2}$ BC . AD $= \frac{1}{2} a \cdot b \sin C$.

[$\because$ ACD হইতে, $\frac{AD}{b} = \sin ACD = \sin(\pi - c) = \sin C$. $\therefore$ AD $= b \sin C$.

(iii) নং C কোণ সমকোণ, $\therefore \sin C = \sin 90° = 1$.

Δ zen $= \frac{1}{2}$ BC . AC $= \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab \sin C$, [$\because \sin C = 1$]

অতএব সকলক্ষেত্রেই, $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$;

আবার, $\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times a \sin C . b = \frac{1}{2} c \sin A . b = \frac{1}{2} bc \sin A$.

[$\because \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$, $\therefore a \sin C = c \sin A$]

এবং $\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} a \cdot b \sin C = \frac{1}{2} a \cdot c \sin B = \frac{1}{2} ca \sin B$.

[$\because \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, $\therefore b \sin C = c \sin B$.]

অতএব $\Delta=\frac{1}{2}\mathbf{ab}\sin\mathbf{C}=\frac{1}{2}\mathbf{bc}\sin\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{ca}\sin\mathbf{B}$.

অর্থাৎ $\Delta=\frac{1}{2}$ (যে কোন দুইটি বাহুর গুণফল) × উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের Sine.

আবার, $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\,2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \qquad \text{[অনু: 54]}$$

$$=\sqrt{\mathbf{s(s-a)(s-b)\ s-c)}}.$$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}(b+c-a)\cdot\tfrac{1}{2}(c+a-b)\cdot\tfrac{1}{2}(a+b-c)},$$

$$[\because\ 2s=a+b+c]$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{\mathbf{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}.$$

আবার, $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}$ $\left[\because\ \frac{c}{\sin C}=2R\right]$

$$=\frac{\mathbf{abc}}{\mathbf{4R}}.$$

অনুসি. $\because\ \Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$,

$$\therefore\ \sin\mathbf{A}=\frac{2\Delta}{\mathbf{bc}},\quad \sin\mathbf{B}=\frac{2\Delta}{\mathbf{ca}},\quad \sin\mathbf{C}=\frac{2\Delta}{\mathbf{ab}}.$$

56. ত্রিভুজের বাহুগুলির মাধ্যমে উহার কোণগুলির Sine-এর প্রকাশ।

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\cdot\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{2\Delta}{bc}.$$

অনুরূপে, $\sin B=\frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{2\Delta}{ca}$.

এবং, $\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{2\Delta}{ab}$.

57. অন্য আকারে $\tan\frac{A}{2}$, $\cot\frac{A}{2}$ ইত্যাদির প্রকাশ।

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\cdot\frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)}}$$
$$=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta},$$

এইরূপে, $\tan\frac{B}{2}=\frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$, $\tan\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$,

$$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}\cdot\frac{s(s-a)}{s(s-a)}}=\frac{s(s-a)}{\Delta},$$

এইরূপে, $\cot\frac{B}{2}=\frac{s(s-b)}{\Delta}$, $\cot\frac{C}{2}=\frac{s(s-c)}{\Delta}$.

58. যে কোন ত্রিভুজ ABC-তে,

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2},$$
$$\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2},$$
$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},$$

$\because\ \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$

$\therefore\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C,$

এখন, $\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{2R\sin B-2R\sin C}{2R\sin B+2R\sin C}\cot\frac{A}{2}$

$$=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}\cdot\cot\frac{A}{2}=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}\cot\frac{A}{2}$$

$$=\cot\frac{B+C}{2}\tan\frac{B-C}{2}\cot\frac{A}{2}$$

$$=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\tan\frac{B-C}{2}\cot\frac{A}{2}\qquad[\because\ A+B+C=\pi]$$

$$=\tan\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B-C}{2}=\tan\frac{B-C}{2}.$$

অনুরূপে অন্য দুইটি সূত্রও প্রমাণ করা যায়।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 2 : 3 : 7 এবং উহার পরিব্যাসার্ধ 10 সেমি. ; ত্রিভুজটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U. '65, H. S. '66]

মনে করি, ত্রিভুজটির কোণগুলি $2K°$, $3K°$, $7K°$

$\therefore\ 2K+3K+7K=180$, or, $K=15$.

$\therefore$ কোনগুলি 30°, 45°, 105°

$$\because\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

$\therefore\ a=2R\sin A=2\,.\,10\,.\,\sin 30°=2\,.\,10\,.\,\frac{1}{2}=10$ সেমি.

$b=2R\sin B=2\,.\,10\,.\,\sin 45°=2\,.\,10.\,\frac{1}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}$ „

$c=2R\sin C=2\,.\,10\,.\,\sin 105°=2\,.\,10\,.\,\sin(60°+45°)$

$=2\,.\,10\,.\,(\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°)$

$=2\,.\,10\,.\,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=5\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ সেমি.

উদা. 2. যে কোন ত্রিভুজ ABC-তে প্রমাণ কর :

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0.$$

[B. H. U. '45, Pat. U. '43, A. U. '62]

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}=\frac{(2R\sin A)^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}\qquad\left[\because\ \frac{a}{\sin A}=2R\right]$$

$$=\frac{4R^2\sin^2 A\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}=\frac{4R^2\sin A\,.\,\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}$$

$\because\ A+B+C=\pi$
$\therefore\ \sin(B+C)$
$=\sin(\pi-A)=\sin A$

$$=\frac{4R^2 \sin A (\sin^2 B - \sin^2 C)}{\sin B + \sin C}$$

$$=\frac{4R^2 \sin A (\sin B + \sin C)(\sin B - \sin C)}{\sin B + \sin C}$$

$$=4R^2 \sin A (\sin B - \sin C).$$

অনুরূপে, $\dfrac{b^2 \sin (C-A)}{\sin C + \sin A} = 4R^2 \sin B (\sin C - \sin A)$.

এবং $\dfrac{c^2 \sin (A-B)}{\sin A + \sin B} = 4R^2 \sin C (\sin A - \sin B)$.

$\therefore$ বামপক্ষ $= 4R^2\{\sin A (\sin B - \sin C) + \sin B (\sin C - \sin A) + \sin C (\sin A - \sin B)\}$

$$= 4R^2 \times 0 = 0.$$

উদা. **3.** $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2+b^2)$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$C = 45°$ or, $135°$.

প্রদত্ত সর্ত হইতে, $a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2(a^2+b^2) = 0$

or, $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 2a^2b^2 = 2a^2b^2$,

or, $(a^2+b^2-c^2)^2 = 2a^2b^2$, or, $\dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2} = \dfrac{1}{2}$,

or, $\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 = \frac{1}{2}$, or, $\cos^2 C = \frac{1}{2}$, $\therefore$ $\cos C = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

স্থতরাং, $C = 45°$, or, $135°$.

উদা. **4.** কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি x^2+x+1, $2x+1$ এবং x^2-1, ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। [C. U. '10]

$\because$ ত্রিভুজের বাহু ঋণাত্মক হইতে পারে না।

$\therefore$ $x^2 - 1 > 0$, or, $x > 1$, $\therefore$ স্পষ্টতই $x^2 + x + 1 > x^2 - 1$.

এবং, $x^2 + x + 1 - (2x+1) = x^2 - x = x(x-1) > 0$,

$\therefore$ $x^2 + x + 1$ ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু এবং এই বাহুর বিপরীত কোণটিই বৃহত্তম। মনে করি কোণটি θ.

$$\therefore \cos\theta = \frac{(x^2-1)^2 + (2x+1)^2 - (x^2+x+1)^2}{2(x^2-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{-2x^3 - x^2 + 2x + 1}{2(2x^3 + x^2 - 2x - 1)} = -\tfrac{1}{2};$$

or, $\cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos 120°$, $\therefore$ $\theta = 120°$.

$\therefore$ বৃহত্তম কোণটি $120°$.

উদা. 5. যে কোন ত্রিভুজ ABC তে প্রমাণ কর,

$$a^3 \cos(B-C)+b^3 \cos(C-A)+c^3 \cos(A-B)=3abc.$$

[Pat. U. '39, '51]

বামপক্ষ $=2Ra^2 \sin A \cos(B-C)+2Rb^2 \sin B \cos(C-A)$
$+2Rc^2 \sin C \cos(A-B)$

$$\left[\because \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\right]$$

$=R\{a^2\cdot 2\sin(B+C)\cos(B-C)+b^2\cdot 2\sin(C+A)\cos(C-A)$
$+c^2\cdot 2\sin(A+B)\cos(A-B)\}$

[$\because$ $A+B+C=\pi$ $\therefore$ $\sin A=\sin(B+C)$,
$\sin B=\sin(C+A)$, $\sin C=\sin(A+B)$]

$=R\{a^2(\sin 2B+\sin 2C)+b^2(\sin 2C+\sin 2A)+c^2(\sin 2A+\sin 2B)\}$

$=R\{a^2(2\sin B\cos B+2\sin C\cos C)+b^2(2\sin C\cos C$
$+2\sin A\cos A)+c^2(2\sin A\cos A+2\sin B\cos B)\}$

$=a^2(2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C)+b^2(2R\sin C\cos C$
$+2R\sin A\cos A)+c^2(2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B)$

$=a^2(b\cos B+c\cos C)+b^2(c\cos C+a\cos A)+c^2(a\cos A$
$+b\cos B)$

$=a^2b\cos B+a^2c\cos C+b^2c\cos C+b^2a\cos A+c^2a\cos A$
$+c^2b\cos B$

$=ab(a\cos B+b\cos A)+bc(b\cos C+c\cos B)+ca(a\cos C$
$+c\cos A)$

$=abc+bca+cab$ [অনু : 53]

$=3abc.$

উদা. 6. $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$ হইলে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু বা সমকোণী।

প্রদত্ত সর্ত হইতে, $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$,

or, $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\sin(A+B)-\sin(A-B)}$, [যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়ার দ্বারা]

or, $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\dfrac{\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}$;

or, $a^2(b^2+c^2-a^2)-b^2(c^2+a^2-b^2)=0$;

or, $a^2c^2-a^4-b^2c^2+b^4=0$;

or, $c^2(a^2-b^2)-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$;

or, $(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$;

∴ হয়, $a^2-b^2=0$, অথবা, $c^2-a^2-b^2=0$,

অর্থাৎ, $a=b$. অর্থাৎ, $a^2+b^2=c^2$.

∴ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

উদা. 7. প্রমাণ কর a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে,

$\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ ও সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে। [A. U. '60]

$\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে,

যদি, $\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{A}{2}=\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{B}{2}$ হয়,

অর্থাৎ যদি, $\dfrac{s(s-b)}{\Delta}-\dfrac{s(s-a)}{\Delta}=\dfrac{s(s-c)}{\Delta}-\dfrac{s(s-b)}{\Delta}$ হয়, [অনু : 57]

" , $(s-b)-(s-a)=(s-c)-(s-b)$ "

" , $a-b=b-c$ "

" , $b-a=c-a$ "

" , a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকে।

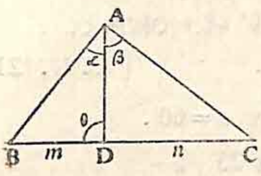
কিন্তু, a, b, c সমান্তর প্রগতিতে আছে।

∴ $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

উদা. 8. ABC ত্রিভুজের ভূমি BC-র উপর D এমন একটি বিন্দু যে মনে কর,

$BD = m, \quad CD = n, \quad \angle BAD = \alpha, \quad \angle CAD = \beta$

এবং, $\angle ADB = \theta$.



চিত্র 25

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $(m+n)\cot\theta = n\cot\beta - m\cot\alpha$.

(ii) $(m+n)\cot\theta = m\cot C - n\cot B$.

প্রমাণঃ (i) প্রদত্ত সর্ত হইতে, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BD}{AD}\cdot\dfrac{AD}{CD}$

এখন, $\triangle ABD$-তে, $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{\sin BAD}{\sin ABD}$ [অনু : 51 (সাইন বিধি)]

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin\{\pi-(\alpha+\theta)\}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}.$$

এবং, $\triangle ACD$-তে, $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{\sin ACD}{\sin CAD} = \dfrac{\sin(\theta-\beta)}{\sin\beta}$. [$\because \theta = \beta + \angle ACD$]

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}\cdot\frac{\sin(\theta-\beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha(\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta)}{\sin\beta(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cot\beta - \cot\theta}{\cot\theta + \cot\alpha}$$

[লব ও হরকে $\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$ দ্বারা ভাগ করিয়া ।]

or, $m\cot\theta + m\cot\alpha = n\cot\beta - n\cot\theta$,

$\therefore (m+n)\cot\theta = n\cot\beta - m\cot\alpha$.

(ii) আবার, $\because \angle BAD = \pi - (\theta + \angle B)$

$\therefore \sin BAD = \sin\{\pi - (\theta + B)\} = \sin(\theta + B)$,

এবং, $\because \theta = \angle CAD + \angle C \quad \therefore \angle CAD = \theta - \angle C$,

$\therefore \sin CAD = \sin(\theta - C)$,

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{BD}{CD} = \frac{BD}{AD}\cdot\frac{AD}{CD} = \frac{\sin BAD}{\sin ABD}\cdot\frac{\sin ACD}{\sin CAD}$$

$$= \frac{\sin(\theta+B)}{\sin B}\cdot\frac{\sin C}{\sin(\theta - C)}$$

$$= \frac{\sin C(\sin\theta\cos B + \cos\theta\sin B)}{\sin B(\sin\theta\cos C - \cos\theta\sin C)} = \frac{\cot B + \cot\theta}{\cot C - \cot\theta},$$

[লব ও হরকে $\sin B\sin C\sin\theta$ দ্বারা ভাগ করিয়া,]

or, $m\cot C - m\cot\theta = n\cot B + n\cot\theta$,

$\therefore (m+n)\cot\theta = m\cot C - n\cot B$

টীকাঃ ফল দুইটি স্থিতিবিদ্যায় বিশেষ প্রয়োজনে লাগে ।

প্রশ্নমালা 11 A

1. ABC ত্রিভুজে $a=3$, $b=3\sqrt{3}$ এবং $A=30°$ হইলে দেখাও যে,
$B=60°$ বা, $120°$. [C. U. '21]

2. $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ হইলে দেখাও যে, $A=60°$.

যে কোন ত্রিভুজ ABC-তে প্রমাণ কর [3 হইতে 25] :—

3. $a\cos\frac{B-C}{2}=(b+c)\sin\frac{A}{2}$. [H. S.]

4. $(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\sin\frac{B-C}{2}$.

[Pat. U. '42, H. S. '61 (Comp.)]

5 $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=(b+c)\sin\frac{A}{2}$. [Pat. U. '40 ; H. S. '62]

6. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$.

[B. H. U. '53, '56, H. S. '61]

7. $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$.

[A. U. '63]

8. $\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$.

9. $a^3\sin(B-C)+b^3\sin(C-A)+c^3\sin(A-B)=0$.

10. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$. [A. U. '32]

11. (i) $a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)$
$+c^2(\cos^2 A-\cos^2 B)=0$.

(ii) $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$.

[C. U. '12, A. U. '62]

12. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$.

13. $bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

14. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$.

[A. U. '44]

15. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0.$

[Pat. U. '45]

16. $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}.$

17. $(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0.$

[Pat. U. '44]

18. $bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=s^2.$

19. $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=0.$

20. $\left(b+c-a\right)\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=2a\cot\frac{A}{2}.$

[Pat. U. '40, A. U. '59]

21. $\frac{2abc}{a+b+c}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\Delta.$ [A. U. '32]

22. $a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B=\frac{\Delta}{R}.$

23. $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4\Delta.$

24. $4\Delta(\cot A+\cot B+\cot C)=a^2+b^2+c^2.$

25. $a\cos(B-C)+b\cos(C-A)+c\cos(A-B)=\frac{\Delta}{R}.$

26. যদি $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$ হয় তবে দেখাও যে ত্রিভুজটির বাহুগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে। [Pat. U. '41]

27. কোন ত্রিভুজ ABC-তে a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর যে $\cot A, \cot B, \cot C$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

[Pat. U. '47, '49, A. U. '60, '62]

28. $\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$ হইলে দেখাও যে, a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতিতে আছে। [Pat. U. '50]

29. $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ হইলে দেখাও যে, $C=60^\circ$.

[Pat. U. '46]

30. $C=60°$ হইলে দেখাও যে, $2a-b=2c \cos B$. [B. H. U. '49]

31. $A=60°$ হইলে দেখাও যে, $2a \cos \frac{B-C}{2}=b+c$. [C. U. '58]

32. $\cos A=\frac{\sin B}{2 \sin C}$ হইলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

[B. H. U. '44, C. U. '44]

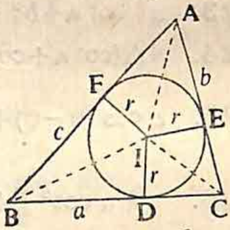
33. $\frac{b+c}{a}=\cot \frac{A}{2}$ হইলে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

34. যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের কোসাইন, কোণ দুইটির বিপরীত বাহুদ্বয়ের সমানুপাতী হয়, তবে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। [A. U. '42]

35. যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের কোসাইন, কোণ দুইটির বিপরীত বাহুদ্বয়ের সহিত ব্যস্ত সমানুপাতে থাকে তবে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু বা সমকোণী।

59. কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত (In circle) বলে। অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে যথাক্রমে I ও R দ্বারা সূচিত করা হয়।

60. ত্রিভুজের বাহু ও কোণ দ্বারা উহার অন্তর্ব্যাসার্ধের প্রকাশ।



চিত্র 26

মনে কর ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র I ও ব্যাসার্ধ r. I হইতে BC, CA ও AB র উপর যথাক্রমে ID, IE ও IF লম্ব অঙ্কন কর। তাহা হইলে $r=ID=IE=IF$. AI, BI, CI যোগ কর।

(1) এখন $\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$

$$=\tfrac{1}{2} \cdot BC \cdot ID+\tfrac{1}{2} \cdot CA \cdot IE+\tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot IF$$

$$=\tfrac{1}{2}ar+\tfrac{1}{2}br+\tfrac{1}{2}cr=\tfrac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$=\tfrac{1}{2}r \cdot 2s=rs\,;$$

অর্থাৎ, $\Delta=rs$.

$$\therefore \quad r=\frac{\Delta}{s}.$$

(2) $a=\text{BC}=\text{BD}+\text{CD}$

$\triangle$ IBD হইতে, $\frac{\text{BD}}{\text{ID}}=\cot\frac{\text{B}}{2}$; or, $\text{BD}=r\cot\frac{\text{B}}{2}$,

$\triangle$ ICD হইতে, $\frac{\text{CD}}{\text{ID}}=\cot\frac{\text{C}}{2}$; or, $\text{CD}=r\cot\frac{\text{C}}{2}$,

$$\therefore\quad a=\text{BD}+\text{CD}=r\cot\frac{\text{B}}{2}+r\cot\frac{\text{C}}{2}$$

$$=r\left(\frac{\cos\frac{\text{B}}{2}}{\sin\frac{\text{B}}{2}}+\frac{\cos\frac{\text{C}}{2}}{\sin\frac{\text{C}}{2}}\right)$$

$$=r\left\{\frac{\cos\frac{\text{B}}{2}\sin\frac{\text{C}}{2}+\cos\frac{\text{C}}{2}\sin\frac{\text{B}}{2}}{\sin\frac{\text{B}}{2}\sin\frac{\text{C}}{2}}\right\}$$

$$=\frac{r\sin\left(\frac{\text{B}}{2}+\frac{\text{C}}{2}\right)}{\sin\frac{\text{B}}{2}\sin\frac{\text{C}}{2}}=\frac{r\sin\left(90^\circ-\frac{\text{A}}{2}\right)}{\sin\frac{\text{B}}{2}\sin\frac{\text{C}}{2}}=\frac{r\cos\frac{\text{A}}{2}}{\sin\frac{\text{B}}{2}\sin\frac{\text{C}}{2}},$$

$$\text{or,}\quad 2\text{R}\,.\,2\sin\frac{\text{A}}{2}\cos\frac{\text{B}}{2}=\frac{r\cos\frac{\text{A}}{2}}{\sin\frac{\text{B}}{2}\sin\frac{\text{C}}{2}},$$

$$\left[\quad a=2\text{R}\sin\text{A}=2\text{R}\,.\,2\sin\frac{\text{A}}{2}\cos\frac{\text{A}}{2}.\right]$$

$$\therefore\quad \mathbf{r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.}$$

(3) $\text{AF}=\text{AE}$, $\text{BD}=\text{BF}$ এবং $\text{CD}=\text{CE}$.

$\therefore\quad \text{AF}+\text{BD}+\text{CD}=\frac{1}{2}(\text{AF}+\text{BD}+\text{CD}+\text{AE}+\text{BF}+\text{CE})$,

or, $\text{AF}+\text{BC}=\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{BC}+\text{CA})=\frac{1}{2}\,.\,2s=s.$

$\therefore\quad \text{AF}=s-\text{BC}=s-a,$

এখন $\triangle$ IAF হইতে, $\frac{r}{\text{AF}}=\tan\frac{\text{A}}{2}$, $\therefore\quad r=(s-a)\tan\frac{\text{A}}{2}.$

অনুরূপে, $r=(s-b)\tan\frac{B}{2}$; $r=(s-c)\tan\frac{C}{2}$.

অন্যভাবে, $r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

$$=(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=(s-b)\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$=(s-c)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

$\therefore\ r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$. [অনুঃ 54]

61. ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র হইতে শীর্ষ বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয়।

অন্তঃকেন্দ্র I হইতে শীর্ষবিন্দুগুলির দূরত্ব IA, IB, IC [অনুঃ 60 এর চিত্র]

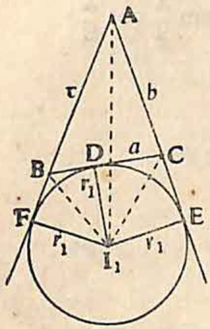
এখন $\triangle$ IAF হইতে, $\frac{IA}{r}=\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$, $\therefore\ IA=r\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$.

অনুরূপে, $IB=r\operatorname{cosec}\frac{B}{2}$ এবং $IC=r\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$.

62. বহির্বৃত্ত (Ex-circle) : যে বৃত্ত ত্রিভুজের যে কোন এক বাহু এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে, তাহাকে ঐ ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত বলে। সুতরাং কোন ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত তিনটি। ABC ত্রিভুজের A কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তের কেন্দ্র I_1 ও ব্যাসার্ধ r_1, B কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তের কেন্দ্র I_2 ও ব্যাসার্ধ r_2 এবং C কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তের কেন্দ্র I_3 ও ব্যাসার্ধ r_3 দ্বারা সূচিত করা হয়।

ত্রিভুজের কোন একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং অপর যে কোন কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহা প্রথমোক্ত কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তের কেন্দ্র হইবে এবং ঐ কেন্দ্র হইতে ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ হইবে।

63. ত্রিভুজের বাহু ও কোণ দ্বারা উহার বহির্ব্যাসার্ধগুলির প্রকাশ।



চিত্র 27

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তের কেন্দ্র I_1 ও ব্যাসার্ধ r_1. I_1 হইতে BC এবং বর্ধিত AC ও AB-র উপর যথাক্রমে I_1D, I_1E ও I_1F লম্ব টান। তাহা হইলে, $I_1D=I_1E=I_1F=r_1$.

AI_1, BI_1, CI_1 যোগ কর।

(1) এখন $\Delta ABC=\Delta I_1AB+\Delta I_1AC-\Delta I_1BC$

$$=\tfrac{1}{2}AB\cdot I_1F+\tfrac{1}{2}AC\cdot I_1E-\tfrac{1}{2}BC\cdot I_1D$$

$$=\tfrac{1}{2}r_1(c+b-a)=\tfrac{1}{2}r_1(2s-2a)$$

$$=r_1(s-a).$$

$$\therefore\quad \mathbf{r_1=\frac{\Delta}{s-a}}.$$

অনুরূপে, $\mathbf{r_2=\dfrac{\Delta}{s-b}}$, $\mathbf{r_3=\dfrac{\Delta}{s-c}}$.

(2) $a=BC=BD+CD$

$\Delta\ I_1BD$ হইতে, $\dfrac{BD}{r_1}=\cot I_1BD$, $\therefore\ BD=r_1\cot I_1BD$

$$\therefore\quad BD=r_1\cot\tfrac{1}{2}(180^\circ-B)=r_1\tan\frac{B}{2}.$$

$\Delta\ I_1CD$ হইতে, $\dfrac{CD}{r_1}=\cot I_1CD=\cot\tfrac{1}{2}(180^\circ-C)=\tan\dfrac{C}{2}$.

$$\therefore\quad CD=r_1\tan\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\quad a=BD+CD=r_1\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$$

$$=r_1\left(\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$=r_1\left\{\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right\}$$

$$=\frac{r_1\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{r_1\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{r_1\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

or, $4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{r_1\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$, $\left[\because\ a=2R\sin A = 2R.\,2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right.$

$$\therefore\ \mathbf{r_1=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

অনুরূপে, $\mathbf{r_2=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$.

$$\mathbf{r_3=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

(3) $AE=AC+CE$ এবং $AF=AB+BF$,

$\therefore\ AE+AF=AC+CE+AB+BF$

or, $2AE=AC+CD+AB+BD$ [$\because$ $AF=AE$, $CE=CD$, $BF=BD$]

$=b+c+(CD+BD)=b+c+a=2s$

$\therefore\ AE=s$.

এখন, $\triangle\ I_1AE$ হইতে, $\frac{I_1E}{AE}=\tan\frac{A}{2}$, $\therefore\ r_1=s\tan\frac{A}{2}$,

অনুরূপে, $r_2=s\tan\frac{B}{2}$, $r_3=s\tan\frac{C}{2}$.

অন্যভাবে, $r_1=\frac{\Delta}{s-a}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$.

$$=s\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=s\tan\frac{A}{2}.$$

অনুরূপে, $r_2=s\tan\frac{B}{2}$, $r_3=s\tan\frac{C}{2}$.

64. বহিঃকেন্দ্র হইতে শীর্ষবিন্দুগুলির দূরত্ব :

$\triangle\ I_1AE$ হইতে, $\frac{r_1}{I_1A}=\sin\frac{A}{2}$,

$\therefore\ I_1A=r_1\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$ [অনু: 63-এর চিত্র]

$$=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.\operatorname{cosec}\frac{A}{2},$$

$$\therefore\ I_1A=r_1\operatorname{cosec}\frac{A}{2}=4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

আবার, $\triangle$ I_1BD হইতে, $\dfrac{r_1}{I_1B} = \sin I_1BD = \sin\left(90^\circ - \dfrac{B}{2}\right) = \cos\dfrac{B}{2}$.

$$\therefore \quad I_1B = r_1 \sec\frac{B}{2}.$$

অনুরূপে, $\quad I_1C = r_1 \sec\dfrac{C}{2}$.

এইরূপে, $\quad I_2B = r_2 \operatorname{cosec}\dfrac{B}{2}, \quad I_2A = r_2 \sec\dfrac{A}{2}, \quad I_2C = r_2 \sec\dfrac{C}{2}$.

এবং, $\quad I_3C = r_3 \operatorname{cosec}\dfrac{C}{2}, \quad I_3A = r_3 \sec\dfrac{A}{2}, \quad I_3B = r_3 \sec\dfrac{B}{2}$.

বিবিধ উদাহরণ

উদা. **1.** প্রমাণ কর : $r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R$. [A. U.]

বামপক্ষ $= \dfrac{\Delta}{s-a} + \dfrac{\Delta}{s-b} + \dfrac{\Delta}{s-c} - \dfrac{\Delta}{s}$

$$= \Delta.\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b}\right) + \Delta\left(\frac{1}{s-c} - \frac{1}{s}\right)$$

$$= \Delta.\ \frac{s-b+s-a}{(s-a)(s-b)} + \Delta.\ \frac{s-s+c}{s(s-c)}$$

$$= \Delta.\ \frac{a+b+c-b-a}{(s-a)(s-b)} + \Delta.\ \frac{c}{s(s-c)}$$

$$= \Delta\ c\left\{\frac{s(s-c)+(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right\}$$

$$= \Delta\ c\left\{\frac{s^2 - sc + s^2 - sb - sa + ab}{\Delta^2}\right\}$$

$$= \frac{c}{\Delta}\{2s^2 - s(a+b+c) + ab\} = \frac{c}{\Delta}(2s^2 - 2s^2 + ab)$$

$$= \frac{abc}{\Delta} = 4R.\ \left[\ \because\ \frac{abc}{4R} = \Delta\ \right]$$

উদা. 2. প্রমাণ কর : $a \cot A + b \cot B + c \cot C = 2(R+r)$.

[Pat. U. '41, '43, C. U. '49]

$$\text{বামপক্ষ} = a.\frac{\cos A}{\sin A} + b.\frac{\cos B}{\sin B} + c.\frac{\cos C}{\sin C}$$

$$= 2R(\cos A + \cos B + \cos C) \left[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \right]$$

$$= 2R\left\{1 + 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}\right\} \quad [\because A+B+C=\pi]$$

[অনু: 39 (2)]

$$= 2\left\{R + 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$= 2(R+r)$$

উদা. 3. প্রমাণ কর : $\dfrac{bc - r_2r_3}{r_1} = \dfrac{ca - r_3r_1}{r_2} = \dfrac{ab - r_1r_2}{r_3}$.

$$r_2r_3 = \frac{\Delta}{s-b}.\frac{\Delta}{s-c} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)} = s(s-a)$$

$$\therefore \quad bc - r_2r_3 = bc - s(s-a) = bc - \frac{2s(2s-2a)}{4}$$

$$= \tfrac{1}{4}\{4bc - (a+b+c)(b+c-a)\} = \tfrac{1}{4}[4bc - \{(b+c)^2 - a^2\}]$$

$$= \tfrac{1}{4}\{a^2 - (b-c)^2\} = \tfrac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$$

$$= \tfrac{1}{4}.(2s-2c)(2s-2b) = (s-b)(s-c)$$

$$\therefore \quad \frac{bc - r_2r_3}{r_1} = \frac{(s-b)(s-c)}{\dfrac{\Delta}{s-a}} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$$= \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s.\Delta} = \frac{\Delta^2}{s.\Delta} = \frac{\Delta}{s} = r.$$

অনুরূপে, $\dfrac{ca - r_3r_1}{r_2} = r, \quad \dfrac{ab - r_1r_2}{r_3} = r,$

$$\therefore \quad \frac{bc - r_2r_3}{r_1} = \frac{ca - r_3r_1}{r_2} = \frac{ab - r_1r_2}{r_3}.$$

উদা. 4. প্রমাণ কর : $(r+r_1)\tan\frac{B-C}{2}+(r+r_2)\tan\frac{C-A}{2}$

$$+(r+r_3)\tan\frac{A-B}{2}=0.$$ [A. U. '36]

$$(r+r_1)\tan\frac{B-C}{2}=\left(\frac{\Delta}{s}+\frac{\Delta}{s-a}\right)\cdot\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$ [অনু: 58]

$$=\Delta\left\{\frac{s-a+s}{s(s-a)}\right\}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{s(s-a)}{\Delta}$$

[$\because\ \cot\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{\Delta}$ (অনু: 57)]

$$=(2s-a)\cdot\frac{b-c}{b+c}=(a+b+c-a)\cdot\frac{b-c}{b+c}=(b-c).$$

অনুরূপে দেখান যায় যে, $(r+r_2)\tan\frac{C-A}{2}=c-a.$

এবং, $(r+r_3)\tan\frac{A-B}{2}=a-b.$

$\therefore$ বামপক্ষ $=b-c+c-a+a-b=0.$

উদা. 5. $r_1-r=r_2+r_3$, হইলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

$r_1-r=r_2+r_3$ or, $\frac{\Delta}{s-a}-\frac{\Delta}{s}=\frac{\Delta}{s-b}+\frac{\Delta}{s-c}$,

or, $\frac{s-s+a}{s(s-a)}=\frac{s-c+s-b}{(s-b)(s-c)}$, or, $\frac{a}{s(s-a)}=\frac{2s-b+c}{(s-b)(s-c)}$,

or, $\frac{1}{s(s-a)}=\frac{1}{(s-b)(s-c)}$, or, $s^2-sb-sc+bc=s^2-sa$,

or, $s(a-b-c)+bc=0$, or, $2s(a-b-c)+2bc=0$,

or, $(a+b+c)(a-b-c)+2bc=0$,

or, $a^2-(b+c)^2+2bc=0$,

or, $a^2-b^2-c^2=0$, or, $a^2=b^2+c^2$.

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী।

উদা. 6. $R=2r$ হইলে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমবাহু। [C. U. '40]

$\because R=2r, \quad \therefore \frac{abc}{4\Delta}=\frac{2\Delta}{s}$, or, $s.abc=8\Delta^2$,

or, $s.abc=8.s(s-a)(s-b)(s-c)=s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)$

or, $abc-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$,

or, $a^3+b^3+c^3-a(b^2+c^2)-b(c^2+a^2)-c(a^2+b^2)+3abc=0$,

or, $(a^3+b^3+c^3-3abc)-a(b^2+c^2)-b(c^2+a^2)-c(a^2+b^2)$
$+6abc=0$,

or, $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$
$-a(b^2+c^2-2bc)-b(c^2+a^2-2ca)-c(a^2+b^2-2ab)=0$,

or, $s\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}-a(b-c)^2-b(c-a)^2$
$-c(a-b)^2=0$,

or, $\{s(b-c)^2-a(b-c)^2\}+\{s(c-a)^2-b(c-a)^2\}$
$+\{s(a-b)^2-c(a-b)^2\}=0$,

or, $(s-a)(b-c)^2+(s-b)(c-a)^2+(s-c)(a-b)^2=0$.

এখন, $\because$ a, b, c ত্রিভুজের বাহু, $\therefore b+c>a$, or, $\frac{b+c}{2}>\frac{a}{2}$

or, $\frac{b+c+a}{2}>a$, or, $s>a$, $\therefore s-a>0$

অনুরূপে, $s-b>0$, $s-c>0$

এবং, $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ প্রত্যেকটিই পূর্ণবর্গ বলিয়া,
$(s-a)(b-c)^2, (s-b)(c-a)^2, (s-c)(a-b)^2$-এর প্রতিটি পৃথকভাবে শূন্য না হইলে উহাদের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে না।

$\therefore (b-c)^2=0, \quad (c-a)^2=0, \quad (a-b)^2=0$

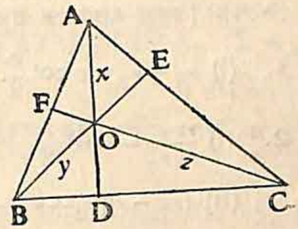
অর্থাৎ, $a=b=c$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমবাহু।

উদা. 7. ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দু O এবং $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{xyz}.$$ [A. U. '40]

মনে কর, A, B, C হইতে বিপরীত বাহু যথাক্রমে BC, CA ও AB-র উপর লম্বত্রয় AD, BE ও CF-এর ছেদবিন্দু O. প্রদত্ত আছে $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$.



চিত্র 28

এখন, $\triangle OAF$ হইতে,

$$\frac{OA}{AF} = \sec OAF = \sec DAB$$

$$= \sec (90^\circ - ABD) = \operatorname{cosec} ABD$$

$$\therefore \quad \frac{OA}{AF} = \operatorname{cosec} B, \quad \text{or,} \quad OA = AF \operatorname{cosec} B.$$

কিন্তু, $\triangle AFC$ হইতে, $\frac{AF}{AC} = \cos A$,

$$\therefore \quad AF = AC \cos A = b \cos A.$$

$$\therefore \quad OA = b \cos A \,.\, \operatorname{cosec} B$$

$$= 2R \sin B \,.\, \cos A \,.\, \operatorname{cosec} B \quad \left[\because \quad \frac{b}{\sin B} = 2R\right]$$

$$= 2R \cos A.$$

$$\therefore \quad x = 2R \cos A.$$

অনুরূপে, $y = 2R \cos B$, $z = 2R \cos C$,

$$\therefore \quad \frac{a}{x} = \frac{2R \sin A}{2R \cos A} = \tan A, \quad \frac{b}{y} = \frac{2R \sin B}{2R \cos B} = \tan B,$$

এবং, $\frac{c}{z} = \frac{2R \sin C}{2R \cos C} = \tan C$, $\left[\because \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right]$

$$\therefore \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \tan A + \tan B + \tan C$$

$$= \tan A \,.\, \tan B \,.\, \tan C \quad [\because \quad A + B + C = \pi$$

[অনু: 39]

$$= \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{c}{z} = \frac{abc}{xyz}.$$

প্রশ্নমালা 11B

যে কোন ত্রিভুজ ABC তে প্রমাণ কর [1 হইতে 19]

1. (i) $r_1+r_2=c\cot\frac{C}{2}$. [A. U. '46] (ii) $r\,r_1\cot\frac{A}{2}=\Delta$.

2. (i) $\frac{rr_1}{r_2r_3}=\tan^2\frac{A}{2}$ [A. U. '47, '57]

(ii) $(r_1-r)(r_2+r_3)=a^2$.

3. $rr_1r_2r_3=\Delta^2$. [B. H. U. '43, C. U. '54]

4. $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$. [B. H. U. '50, '55 ; C. U. '43, '50]

5. $r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2=s^2$. [C. U. '43, '54]

6. $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4Rr^2$. [A. U. '62]

7. $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2Rr}$. [B. H. U. '59, A. U. '60]

8. $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{s}{R}=\frac{\Delta}{Rr}$. [C. U. '51]

9. $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{s}{R}$.

10. $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$. [A. U. '51, C. U. '59]

11. $a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B=\frac{\Delta}{R}$.

12 $(r_1+r_2)\tan\frac{C}{2}=(r_3-r)\cot\frac{C}{2}=c$. [A. U. '53]

13. $\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)=\frac{16R}{r^2(a+b+c)^2}$ [A. U. '38]

14. $\frac{b-c}{r_1}+\frac{c-a}{r_2}+\frac{a-b}{r_3}=0$.

15. $\frac{r_1}{bc}+\frac{r_2}{ca}-\frac{r_3}{ab}=\frac{1}{r}-\frac{1}{2R}$. [A. U. '57]

16. $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}$. [A. U. '52]

17. $a(rr_1+r_2r_3)=b(rr_2+r_1r_3)=c(rr_3+r_1r_2)$. [B. H. U. '57]

18. $\frac{r_2+r_3}{1+\cos A}=\frac{r_3+r_1}{1+\cos B}=\frac{r_1+r_2}{1+\cos C}$.

19. $\dfrac{(r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_3+r_1)}{r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2}=4R.$ [B. H. U. '51]

20. কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 96 এবং বর্হিবৃত্তের ব্যাসার্ধগুলি 8, 12 ও 24; দেখাও যে ত্রিভুজটির বাহুগুলি 12, 16 ও 20। [A. U. '63]

21. যদি কোন ত্রিভুজ ABC এর যে বর্হিবৃত্ত বাহু a-কে স্পর্শ করে তাহা পরিবৃত্তের সমান হয়; তবে প্রমাণ কর যে,

$$\cos A=\cos B+\cos C.$$ [C. U. '45, '47]

22. কোন ত্রিভুজে যদি, $3R=4r$ হয় তবে দেখাও যে,

$$4(\cos A+\cos B+\cos C)=7.$$

23. কোন ত্রিভুজের একটি বর্হিবৃত্তের ব্যাস উহার পরিসীমার সমান হইলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী। [C. U. '48, '60]

24. $\left(1-\dfrac{r_1}{r_2}\right)\left(1-\dfrac{r_1}{r_3}\right)=2$ হইলে, দেখাও যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

[C. U. '49, B. H. U. '54]

25. $8R^2=a^2+b^2+c^2$ হইলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

[A. U. '53]

26. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্ব দৈর্ঘ্য p_1, p_2, p_3 হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}.$$

27. ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R এবং পরিকেন্দ্র হইতে বাহুগুলির উপর লম্বদৈর্ঘ্য p_1, p_2, p_3 হইলে দেখাও যে,

$$\frac{a}{p_1}+\frac{b}{p_2}+\frac{c}{p_3}=\frac{abc}{4p_1p_2p_3}.$$ [C.U. '45, B. H. U. '53]

28. যদি অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল S এবং বর্হিবৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ S_1, S_2, S_3 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{\sqrt{S}}=\dfrac{1}{\sqrt{S_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{S_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{S_3}}.$ [C. U. '48]

29. যে কোন ত্রিভুজ ABC তে প্রমাণ কর যে, অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের অনুপাত সমান $\pi : \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$ [C. U. '31]

দ্বাদশ অধ্যায়

কোণানুপাতের তালিকা

(Trigonometrical Tables)

65.

(i) Table I : সাধারণ লগ তালিকা। এই তালিকা ব্যবহার পদ্ধতি বীজগণিতে আলোচিত হইয়াছে।

(ii) Table II : Antilogarithm তালিকা।

(iii) Table III : (Natural sine and cosine Table.)

এই তালিকায় $1'$ এর ব্যবধানে $0°$ হইতে 90" পর্য্যন্ত কোণসমূহের sine ও cosine এর মান দেওয়া আছে। তালিকার উপরে Natural sine ও নীচে Natural cosine লেখা আছে ; অর্থাৎ একই তালিকা হইতে sine ও cosine-এর মান পাওয়া যাইবে। Sine-এর মান উপরের বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া উপর হইতে নীচে এবং বামদিক হইতে দক্ষিণদিকে লেখা আছে। Cosine এর মান নীচের দক্ষিণদিক হইতে আরম্ভ করিয়া উপরের দিকে এবং দক্ষিণদিক হইতে বামদিকে লেখা আছে। এই তালিকা এইরূপভাবে গঠিত হইয়াছে যে, যে কোন কোণের sine ও উহার পূরক কোণের cosine এর মান সমাপতিত হইয়াছে।

তালিকার প্রধান অংশ হইতে কোণসমূহের sine ও cosine-এর মান $10'$ ব্যবধানে পাওয়া যায়। আর Mean difference অংশের সাহায্যে কোণানুপাতের মান $1'$ এর ব্যবধানে নির্ণয় করা যায়।

তালিকা ব্যবহার করার সময় এই বিষয়টি বিশেষভাবে মনে রাখিতে হইবে যে, কোণ $0°$ হইতে $90°$ পর্য্যন্ত ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে sine এর মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায় ; কিন্তু cosine এর মান ক্রমান্বয়ে হ্রাস পায়। সেইজন্য কোণের পরিমাণ বৃদ্ধি পাইলে Mean difference অংশ হইতে প্রাপ্তমান **sine-এর ক্ষেত্রে যোগ করিতে হয়** আর **cosine-এর ক্ষেত্রে বিয়োগ** করিতে হয়। যেমন,

$\sin 34° 20' = \cdot 56401$ এবং $\sin 34° 22' = \cdot 56401 + \cdot 00048 = \cdot 56449.$

$\cos 62° 50' = \cdot 45658$ এবং $\cos 62° 54' = \cdot 45658 - \cdot 00103 = \cdot 45555.$

(iv) Table IV : Natural Tangent ও Cotangent Table.

এই তালিকার 1′ এর ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণসমূহের tangent ও cotangent-এর মান দেওয়া আছে। এই তালিকার গঠন প্রণালী স্বাভাবিক সাইন ও কোসাইন তালিকার মত। কোণের পরিমাণ 0° হইতে 90° পর্যন্ত ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পাইলে উহার tangent-এর মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি এবং cotangent এর মান ক্রমান্বয়ে হ্রাস পায়। সুতরাং tangent-এর ক্ষেত্রে অতিরিক্ত মিনিটের জন্য Mean difference অংশ হইতে প্রাপ্ত মান **যোগ** করিতে এবং cotangent-এর ক্ষেত্রে **বিয়োগ** করিতে হয়। যেমন,

$\tan 20°40' = \cdot37720$ এবং $\tan 20°46' = \cdot37720 + \cdot00199 = \cdot37919$.

$\cot 44°10' = 1\cdot02952$ এবং $\cot 44°18' = 1\cdot02952 - \cdot00474 = 1\cdot02478$.

(v) Table V : Logarithmic sine and cosine Table.

এই তালিকার সাহায্যে 1′ এর ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণ সমূহের জন্য $L \sin \theta$ (Logarithmic $\sin \theta$, অর্থাৎ $10 + \log \sin \theta$) এবং $L \cos \theta$ $(10 + \log \cos \theta)$ এর মান নির্ণয় করা যায়।

যে কোন কোণের sine এবং cosine এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না এবং 0° হইতে 45° পর্যন্ত কোণসমূহের tangent ও cotangent এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। সুতরাং ঐ কোণসমূহের কোণানুপাতের লগারিদ্‌ম্‌ ঋণাত্মক। তালিকায় ঋণাত্মক মান লেখা অসুবিধাজনক বলিয়া কোণানুপাতগুলির লগ্‌ এর সহিত সর্বদা 10 যোগ করিয়া তালিকা প্রস্তুত করা হইয়াছে।

এই তালিকার গঠন ও ব্যবহার পদ্ধতি sine and cosine Table এর ন্যায়। $L \sin \theta$ এর ক্ষেত্রে Mean difference হইতে প্রাপ্ত মান যোগ করিতে এবং $L \cos \theta$ এর ক্ষেত্রে বিয়োগ করিতে হয়। যেমন,

$$L \sin 52°\, 35' = 9\cdot89947 + \cdot00049 = 9\cdot89996.$$

$$L \cos 21°\, 29' = 9\cdot96917 - \cdot00044 = 9\cdot96873.$$

(vi) Table VI : Logarithmic Tangent and Cotangent Table.

এই তালিকা হইতে 1′ এর ব্যবধানে $L \tan \theta$ ও $L \cot \theta$ এর মান পাওয়া যায়। তালিকার গঠন ও ব্যবহার পদ্ধতি পূর্বের তালিকার ন্যায় Mean difference অংশ

হইতে প্রাপ্ত tangent এর ক্ষেত্রে যোগ করিতে হইবে এবং cotangent এর ক্ষেত্রে বিয়োগ করিতে হইবে।

66. সমানুপাতী অংশ বিধি (Principle of proportional parts) :—

কোন চলরাশির মানের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য উহার অপেক্ষকের অনুরূপ মানের যে পরিবর্তন হয় তাহা, চলরাশিটির মানের ঐ পরিবর্তনের প্রায় সমানুপাতী।

অতএব এই বিধি হইতে বলা যায় যে,

(a) কোন সংখ্যার লগারিদমের মানের পরিবর্তন ঐ সংখ্যার অনুরূপ ক্ষুদ্র পরিবর্তনের সমানুপাতী।

(b) কোন কোণানুপাতের মানের পরিবর্তন কোণের অনুরূপ মানের ক্ষুদ্র পরিবর্তনের সমানুপাতী।

প্রয়োজনীয় মান নির্ধারণে বিধিটির প্রয়োগ প্রদত্ত উদাহরণ হইতে স্পষ্ট হইবে।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. প্রদত্ত আছে log 34938 = 4·5432980, log 34939 = 4·5433105.

(i) মান নির্ণয় কর, log 349383 (ii) সেই সংখ্যাটি নির্ণয় কর যাহার লগ $\bar{1}$·5433055.

(i) log 34938·3 এর অংশক অবশ্যই log 34938 এবং log 34939 এর অংশকদ্বয়ের মধ্যবর্তী হইবে।

এখন log 34939 = 4·5433105

log 34938 = 4·5432980

∴ 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর = ·0000125

∴ ·3 " " " = ·0000125 × ·3 = ·00000375

∴ log 38938·3 = 4·5432980 + ·00000375

= 4·54330175.

∴ log 349·383 = 2·5433018. [7 দশমিক পর্যন্ত শুদ্ধ মান]

(ii) 4·5433055 সংখ্যাটি 4·5432980 এবং 4·5433105 এর মধ্যবর্তী।

∴ 4·5433055 যে সংখ্যার লগ তাহা অবশ্যই 34938 এবং 34939 এর মধ্যবর্তী হইবে। মনে করি সংখ্যাটি $34938 + x$.

এখন $4{\cdot}5433055 - 4{\cdot}5432980 = {\cdot}0000075$

∵ 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= {\cdot}0000125$

এবং x " " " $= {\cdot}0000075$

$\therefore \quad x = \dfrac{75}{125} = {\cdot}6.$

$\therefore \quad 4{\cdot}5433055 = \log 34938{\cdot}6$

$\therefore \quad \bar{1}{\cdot}5433055 = \log {\cdot}349386$

সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যাটি ·349386.

উদা. 2. প্রদত্ত আছে, $\sin 43°\,28' = {\cdot}6879325$, $\sin 43°\,29' = {\cdot}6881435$ মান নির্ণয় কর : $\sin 43°\,28'\,12''$ এর।

$\sin 43°\,29' = {\cdot}6881435$

$\sin 43°\,28' = {\cdot}6879325$

1′ এর জন্য অন্তর $= {\cdot}0002110$ (সংক্ষেপে 2110)

∴ 12″ এর জন্য অন্তর $= \dfrac{2110 \times 12}{60} = 422$

$\therefore \quad \sin 43°\,28'\,12'' = {\cdot}6879325 + {\cdot}0000422 = {\cdot}6879747.$

উদা. 3. $\cos 48°\,21' = {\cdot}66458$, $\cos 48°\,20' = {\cdot}66480$ প্রদত্ত আছে ; সেই কোণটি নির্ণয় কর যাহার cosine ·66467.

$\cos 48°\,20' = {\cdot}66480$

$\cos 48°\,21' = {\cdot}66458$

1′ এর জন্য অন্তর $= {\cdot}00022$

মনে কর নির্ণেয় কোণটি θ

তাহা হইলে অবশ্যই $\theta = 48°\,20'\,x''$

এখন, $\cos 48°\,20' = {\cdot}66480$

$\cos\theta = {\cdot}66467$

∴ x'' এর জন্য অন্তর $= {\cdot}00013.$

$\therefore \quad x'' = \dfrac{60''}{22} \times 13 = 35{\cdot}5''$ (প্রায়)

∴ নির্ণেয় কোণটি 48° 20′ 35·5″.

উদা. 4. প্রদত্ত আছে L tan $34°42' = 9{\cdot}8403776$ এবং $1'$-এর জন্য অন্তর $= 2699$; সেই কোণটি নির্ণয় কর যাহার L tan $34°\ 42' = 9{\cdot}8406205$.

মনে কর নির্ণেয় কোণটি θ ; তাহা হইলে অবশ্যই $\theta = 34°\ 42'\ x''$,

এখন, L tan $34°42'\ x'' = 9{\cdot}8406205$

L tan $34°42' \quad = 9{\cdot}8403776$

$\therefore$ x''-এর জন্য অন্তর $= {\cdot}0002429$

প্রদত্ত আছে, $1' = 60''$-এর জন্য অন্তর $= {\cdot}0002699$

$$\therefore \quad x'' = \frac{60'' \times 2429}{2699} = 54'' \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণটি $34°42'54''$.

উদা. 5. প্রদত্ত আছে, L cos $39°14' = 9{\cdot}8890644$, L cos $39°13' = 9{\cdot}8891676$ বাহির কর L cos $39°13'40''$ এবং, L sec $39°13'40''$.

L cos $39°13' = 9{\cdot}8891676$

L cos $39°14' = 9{\cdot}8890644$

$1'$-এর জন্য অন্তর $= {\cdot}0001032$

$\therefore$ $40''$-এর জন্য অন্তর

$$= \frac{{\cdot}0001032}{60} \times 40 = {\cdot}0000688.$$

$\therefore$ L cos $39°13'40''$

$= 9{\cdot}8891676 - {\cdot}0000688$

$= 9{\cdot}8890988.$

এখন L sec $39°13'40'' = 10 + \log \sec 39°13'40''$

$$= 10 + \log \frac{1}{\cos 39°13'40''}$$

$$= 10 - \log \cos 39°13'40''$$

$$= 10 - (10 + \log \cos 39°13'40'' - 10)$$

$$= 10 - \text{L} \cos 39°13'40'' + 10$$

$$= 20 - 9{\cdot}8890988$$

$$= 10{\cdot}1109012.$$

প্রশ্নমালা 12

1. প্রদত্ত আছে $\log 12842 = 4{\cdot}1086327$,
$\log 12843 = 4{\cdot}1086665$; বাহির কর (i) $\log 12{\cdot}8427$ এবং
(ii) সেই সংখ্যাটি যাহার লগ $\bar{3}{\cdot}1086521$.

তালিকা হইতে মান বাহির কর :—

2. $\sin 45°36'$ **3.** $\cos 88°27'$ **4.** $\tan 24°48'$

5. $\cot 52°23'$ **6.** $L \cos 36°51'$ **7.** $L \tan 65°6'$

8. $L \sin 75°14'$ **9.** $L \cot 15°57'$ **10.** $L \operatorname{cosec} 34°24'$

11. প্রদত্ত আছে $\sin 32°33' = {\cdot}53804$, $\sin 32°34' = {\cdot}53828$; নির্ণয় কর $\sin 32°33'44''$.

12. প্রদত্ত আছে $L \sin 37°43'40'' = 9{\cdot}7867152$,
এবং, $L \sin 37°43'50'' = 9{\cdot}7867424$;
নির্ণয় কর $L \sin 37°43'46''$. [C. U. '10]

13. প্রদত্ত আছে $L \tan 79°51'40'' = 10{\cdot}7475657$,
এবং, $L \tan 79°51'50'' = 10{\cdot}7476872$;
সেই কোণটি নির্ণয় কর যাহার $L \tan = 10{\cdot}7476532$. [C. U. '21]

14. প্রদত্ত আছে $L \sin 39°35' = 9{\cdot}8042757$,
এবং $L \sin 39°36' = 9{\cdot}8044284$;
নির্ণয় কর $L \sin 39°35'25''$ এবং $L \operatorname{cosec} 39°35'25''$.

15. θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$L \sin \theta + L \operatorname{cosec} \theta = L \tan \theta + L \cot \theta = L \sec \theta + L \cos \theta = 20.$$

ত্রয়োদশ অধ্যায়

ত্রিভুজ সমাধান (Solution of Triangles)

67. একটি ত্রিভুজের ছয়টি অংশ—তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ। এই ছয়টি অংশের যে কোন তিনটি (যাহাদের অন্ততঃ পক্ষে একটি বাহু) প্রদত্ত থাকিলে ত্রিভুজটি দ্ব্যর্থহীনভাবে নির্ধারণ করা যায়। কিন্তু কেবলমাত্র তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজ যথাযথ ভাবে নির্ধারণ করা যায় না ; কেননা এক্ষেত্রে এমন অসংখ্য সদৃশকোণী ত্রিভুজ হইতে পারে যাহাদের প্রত্যেকটির তিনটি কোণ প্রদত্ত তিনটি কোণের সমান। কোন ত্রিভুজের প্রদত্ত তিনটি অংশের সাহায্যে অজানা তিনটি অংশ নির্ণয় করিবার প্রক্রিয়াকে ত্রিভুজ সমাধান বলে।

ত্রিভুজ সমাধানের জন্য প্রদত্ত তিনটি অংশ নিম্নলিখিত রূপ হইতে পারে :

1. তিনটি কোণ।
2. তিনটি বাহু।
3. দুইটি বাহু এবং অন্তর্ভূত কোণ।
4. দুইটি কোণ এবং একটি বাহু।
5. দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ।

68. সাধারণ আলোচনা : ত্রিভুজের প্রদত্ত অংশগুলির সাহায্যে ত্রিভুজ সমাধান করিবার জন্য বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন সূত্র ব্যবহার করা যায়। আবার একই প্রশ্ন বিভিন্ন ভাবে বিভিন্ন সূত্রের প্রয়োগে সমাধান করা যায়। যদি প্রদত্ত অংশগুলি ছাড়া অতিরিক্ত কোন তথ্য না দেওয়া থাকে তবে সুবিধামত যে কোন সূত্র নির্বাচন করা যাইতে পারে। আর অতিরিক্ত তথ্য প্রদত্ত থাকিলে সেই সূত্রটিই ব্যবহার করিতে হইবে যেইটি প্রদত্ত তথ্যের সঙ্গে খাপ খায়।

সূত্র প্রয়োগকালে এই বিষয়টি মনে রাখিতে হইবে যে, সূত্র প্রয়োগে কোণ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে sine সূত্রের ব্যবহারে দ্ব্যর্থকতার উদ্ভব হইতে পারে। যেমন মনে করা যাক A কোণ নির্ধারণ করিতে গিয়া দেখা গেল $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$; তাহা হইলে $A = 60°$ অথবা $120°$ উভয়ই হইতে পারে। সুতরাং অন্য তথ্য না দেওয়া থাকিলে sine সূত্র ব্যবহার করা চলে না। কিন্তু cosine বা tangent সূত্র ব্যবহারের ওইরূপ কোন অসুবিধার উদ্ভব হয় না।

বিভিন্ন তালিকা হইতে কোণের যে মান নির্ণয় করা হয় তাহা আসন্নমান (approximate value)। এখন বিভিন্ন তালিকা হইতে প্রাপ্ত মান সমূহের মধ্যে L tan-এর মানই সর্বাপেক্ষা শুদ্ধ বলিয়া tan-এর সূত্র ব্যবহারই শ্রেয়। স্বতরাং ত্রিভুজ সামাধান কালে নির্দিষ্ট প্রশ্নে অতিরিক্ত অন্য তথ্য প্রদত্ত না থাকিলে tan-এর সূত্রই ব্যবহার করিতে হইবে।

69. প্রদত্ত তিনটি কোণ হইতে ত্রিভুজ সমাধান।

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে কেবলমাত্র তিনটি কোণ প্রদত্ত থাকিলে ত্রিভুজটি সঠিকভাবে নির্ধারণ করা যায় না। এক্ষেত্রে সাইন বিধির সাহায্যে কেবল বাহু তিনটির অনুপাত নির্ণয় করা যায়। স্বতরাং এক্ষেত্রে ত্রিভুজটির কেবলমাত্র আকার (shape) নির্ধারণ করা যায়, আয়তন (size) নয়।

উদা. কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 2 : 3 : 7 ; উহার বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

মনে কর, ত্রিভুজটি ABC

এবং $A=2K^\circ,\ B=3K^\circ,\ C=7K^\circ$.

$\therefore\ 2K+3K+7K=180, \quad \text{or,}\quad K=15,$

$\therefore\ A=30^\circ,\ B=45^\circ,\ C=105^\circ.$

$\therefore\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ সূত্র হইতে,

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sin 30^\circ:\sin 45^\circ:\sin 105^\circ$

$$=\frac{1}{2}:\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$$

টীকা: প্রদত্ত তথ্যের সহিত যদি অন্য কোন অতিরিক্ত তথ্য, যেমন ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ $=10$ একক দেওয়া থাকে তবে বাহুগুলির পরিমাণ নির্দিষ্ট করিয়া জানা যায়।

সেক্ষেত্রে $a=2R\sin A=10$ একক।

$b=2R\sin B=10\sqrt{2}$ „ ।

$c=2R\sin C=5\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ একক।

প্রশ্নমালা 13A

1. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি 15°, 45° ও 120° ; উহার বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

2. কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3 ; প্রমাণ কর যে উহার বাহুগুলির অনুপাত 1 : √3 : 2. [H. S. '60]

70. প্রদত্ত তিনটি বাহু হইতে ত্রিভুজ সমাধান।

কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু a, b, c প্রদত্ত থাকিলে নিম্নের সূত্রগুলির মধ্যে যে কোন একটির সাহায্যে A কোণটি নির্ণয় করা যায় :—

$$\sin A = \frac{2\Delta}{bc},\quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

ইহাদের মধ্যে sin A-র সূত্র ব্যবহারে দ্ব্যর্থকতার উদ্ভব হইতে পারে বলিয়া ঐ সূত্র ব্যবহার করা চলিবে না। এ সম্বন্ধে পূর্বেই আলোচনা করা হইয়াছে। cos A-র সূত্র ব্যবহারে ঐরূপ কোন অসুবিধা নাই। কিন্তু cos A-র মান নির্ণয়ে লগ-এর ব্যবহার অসুবিধাজনক। a, b, c-র মান ক্ষুদ্র হইলেই এই সূত্র ব্যবহার করা চলে। শেষ তিনটি সূত্র লগারিদ্‌মের প্রয়োগে গণনাকার্যের পক্ষে সুবিধাজনক।

অনুরূপে B কোণ এবং 180° হইতে A ও B-এর সমষ্টি বিয়োগ করিয়া C কোণ নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 5, 6, 7 তাহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত আছে log 6 = ·7781513, L cos 39°14′ = 9·8890644.
এবং 1′ এর জন্য অন্তর = 1032. [Pat. U. '38, A. U. '63, C. U.]

মনে কর, $a=5$, $b=6$, $c=7$.

যেহেতু বৃহত্তম কোণটি বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ, অতএব এখানে C কোণ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$ $\left[s=\frac{a+b+c}{2}=9.\right.$

$=\sqrt{\frac{9\times 2}{30}}=\sqrt{\frac{6}{10}}.$

$\therefore\ L\cos\frac{C}{2}=10+\log\sqrt{\frac{6}{10}}=10+\frac{1}{2}\log 6-\frac{1}{2}\log 10$

$=10+\frac{1}{2}\times\cdot 7781513-\cdot 5=9\cdot 5+\cdot 38907565$

$=9\cdot 88907565.$

স্পষ্টতই $\frac{C}{2}$ কোণটি $39°14'$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

মনে কর, $\frac{C}{2}=39°14'-x''.$

$\therefore$ x'' এর জন্য অন্তর $=9\cdot 88907565-9\cdot 8890644,$

$=\cdot 00001125.$

$\frac{x''}{60''}=\frac{\cdot 00001125}{\cdot 00010320},$ or, $x=\frac{1125\times 60''}{10320}=6\cdot 5''$ (প্রায়)

$\therefore\ \frac{C}{2}=39°14'-6\cdot 5''$, or, $C=78°28'-13''$,

$=78°27'47''$ (প্রায়),

$\therefore$ বৃহত্তম কোণটি $=78°27'47''$.

টীকা : এখানে L cos এর মান প্রদত্ত আছে বলিয়া C কোণ নির্ণয়ে cos C বা $\cos\frac{C}{2}$ এর ব্যবহার করা যায়।

কিন্তু $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$

$=\frac{25+36-49}{2\times 5\times 6}=\frac{61-49}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}=\frac{2}{10}.$

অতএব এই সূত্রের ব্যবহার প্রদত্ত তথ্যের সঙ্গে খাপ খায় না ; কারণ log 6 এর মান দেওয়া আছে। log 5 বা log 2 কোনটিরই মান দেওয়া নাই।

উদা. 2. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 7, 8, 9 ; উহার বাহু 8 এর বিপরীত কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 3010300$, $L \tan 29°12'20'' = 9\cdot 7474183$ এবং $L \tan 29°12'30'' = 9\cdot 7474677$.

মনে কর $a=7$, $b=8$, $c=9$; $\therefore$ B কোণটি নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন $\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-b)}}$

$$= \sqrt{\frac{5\times 3}{12\times 4}} = \sqrt{\frac{5}{16}}, \quad \left[s = \frac{a+b+c}{2} = 12 \right]$$

$$= \sqrt{\frac{10}{32}},$$

$\therefore \quad L \tan \frac{B}{2} = 10 + \frac{1}{2}\log 10 - \frac{1}{2}\log 2^5$

$$= 10 + \cdot 5 - \tfrac{5}{2} \times \cdot 3010300 = 10\cdot 5 - \cdot 7525750$$

$$= 9\cdot 7474250.$$

স্পষ্টতই $\frac{B}{2}$ কোণটি $29°12'20''$ অপেক্ষা কিছু বেশী। মনে করি $\frac{B}{2} = 29°12'20'' + x''$.

$\therefore$ x'' এর জন্য অন্তর $= 9\cdot 7474250 - 9\cdot 7474183 = \cdot 00000467$, এবং প্রদত্ত মান হইতে $10''$ এর জন্য অন্তর $= 9\cdot 7474677 - 9\cdot 7474183$

$$= \cdot 0000494,$$

$\therefore \quad \frac{x''}{10''} = \frac{\cdot 0000067}{\cdot 0000494}, \quad$ or, $\quad x = \frac{67 \times 10''}{494} = 1\cdot 35''$ (প্রায়)

$\therefore \quad \frac{B}{2} = 29°12'21\cdot 35''$, $\quad$ or, $\quad B = 58°24'42\cdot 7''$ (প্রায়)

প্রশ্নমালা 13B

1. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 56, 65 এবং 33 ফুট ; উহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। [H. S. '62 (Comp.)]

2. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 7, 5 এবং 3 সেমি ; উহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। [H. S. '63 (Comp.)]

3. $a=10, b=10\sqrt{2}, c=5\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ হইলে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

4. কোন ত্রিভুজে $a=4, b=5, c=6$, B নির্ণয় কর। দেওয়া আছে,

$\log 2 = \cdot 3010300$, L cos $27°53' = 9\cdot 9464040$ এবং

$1'$ এর জন্য অন্তর $= \cdot 0000669$. [C. U. '41 ; Pat. U. '44]

5. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 2, 3, 4 ; বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot 30130300$, $\log 3 = \cdot 4771213$,

L tan $52°14' = 10\cdot 1108395$, L tan $52°15' = 10\cdot 1111004$.

[B.H.U. '52]

6. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 7, 8, 9 ; উহার কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot 3010300$, L tan $24°5'40'' = 9\cdot 6505069$,

L tan $24°5'50'' = 9\cdot 6505634$, L tan $29°12'20'' = 9\cdot 7474183$,

L tan $29°12'30'' = 9\cdot 7474677$. [C.U. '38, B.H.U. '38]

7. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 753, 375, 872 ; ক্ষুদ্রতম কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 247 = 2\cdot 3926970$,

L tan $12°39' = 9\cdot 3516968$ এবং $1'$ এর জন্য অন্তর $= 5901$.

8. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 9, 10, 11 ; বাহু 10 এর বিপরীত কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 30103$, L tan $29°29' = 9\cdot 7523472$,

L tan $29°30' = 9\cdot 7526420$. [C. U. '43]

9. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 12, 15, 16, লগ তালিকার সাহায্যে তাহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। [C. U. '57]

10. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 32, 40, 66 তাহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 207 = 2\cdot 3159703$, $\log 1073 = 3\cdot 0305997$,

L cot $66°18' = 9\cdot 6424342$, এবং $1'$ এর জন্য অন্তর $= \cdot 0003431$.

[C. U. '56, '60]

71. দুইটি বাহু ও উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজ সমাধান।

মনে কর দুইটি বাহু a এবং b এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ C দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে, অর্থাৎ A, B এবং C-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

1. যদি $a=b$ হয়, তবে A=B হইবে।

সুতরাং $A+B+C=180°$, or, $2A+C=180°$ হইলে A ও B এর মান নির্ণয় করা যাইবে এবং তাহা হইলে বাহু c এর মান $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ এই সূত্র হইতে নির্ণীত হইবে।

2. যদি $a\neq b$ হয়, তবে মনে কর $a>b$. $\therefore$ A>B,

তাহা হইলে, $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$,

$$\therefore\ L\tan\frac{A-B}{2}=10+\log\left(\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\right)$$

$$=10+\log(a-b)-\log(a+b)+\log\cot\frac{C}{2}$$

$$=\log(a-b)-\log(a+b)+L\cot\frac{C}{2}\ \cdots\quad\cdots(i)$$

a, b ও C-এর মান প্রদত্ত বলিয়া (i) এর দক্ষিণপক্ষের মান জ্ঞাত। সুতরাং উহা হইতে $L\tan\frac{A-B}{2}$ নির্ণয় করিয়া $\frac{A-B}{2}$ এর মান জানা যাইবে।

আবার, $\because\ \frac{A+B}{2}=180°-\frac{C}{2}$, $\therefore\ \frac{A+B}{2}$ এর মান জ্ঞাত।

$\therefore\ \frac{A-B}{2}$ এবং $\frac{A+B}{2}$ এর মান হইতে A এবং B এর মান জানা যাইবে।

তাহা হইলে বাহু c এর মান $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ সূত্র হইতে জানা যাইবে।

উদা. 1. কোন ত্রিভুজে $b=540$, $c=420$ এবং $A=52°6'$; B এবং C নির্ণয় কর।

প্রদত্ত আছে $L \tan 26°3'=9{\cdot}6891430$, $L \tan 14°20'=9{\cdot}4074189$,
$L \tan 14°21'=9{\cdot}4079453$, $\log 2=\cdot 3010300$.

[C. U. '34, Pat. U. '50]

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{540-420}{540+420}\cot 26°3'$$

$$=\tfrac{1}{8}\cot 26°3'=\frac{1}{8\tan 26°3'}$$

$$\therefore\quad L\tan\frac{B-C}{2}=10-3\log 2-\log\tan 26°3'$$

$$=10-3\log 2-(L\tan 26°3'-10)$$

$$=20-3\times\cdot 3010300-9{\cdot}6891430$$

$$=9{\cdot}4077670$$

তাহা হইলে অবশ্যই $\frac{B-C}{2}=14°20'x''$.

$\therefore\quad x''$ এর জন্য অন্তর $=9{\cdot}4077670-9{\cdot}4074189$

$$=\cdot 0003481$$

এবং $1'=60''$ এর জন্য অন্তর $=9{\cdot}4079453-9{\cdot}4074189$

$$=0005264.$$

$$\therefore\quad \frac{x''}{60''}=\frac{3481}{5264},\qquad \text{or,}\quad x=39{\cdot}7''\ (\text{প্রায়})$$

$$\therefore\quad \frac{B-C}{2}=14°20'39{\cdot}7''\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\text{(i)}$$

এবং $\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}=90°-26°3'=63°57'$ $\cdots$ $\cdots$(ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) হইতে, $B=78°17'39{\cdot}7''$

এবং $C=63°57'-14°20'39{\cdot}7''$

$$=49°36'20{\cdot}3''.$$

উদা. 2. কোন ত্রিভুজ ABC-তে $a : b = 7 : 3$ এবং $C = 60°$; A এবং B নির্ণয় কর। প্রদত্ত আছে, $\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 3 = \cdot 4771213$.

$L \tan 34°42' = 9\cdot 8403776$ এবং $1'$-এর জন্য অন্তর $= 2699$.

[Pat. U. '40]

মনে কর, $a = 7K$ এবং $b = 3K$,

$$\therefore \quad \tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2} = \frac{7K-3K}{7K+3K}\cot 30° = \frac{4\sqrt{3}}{10},$$

$$\therefore \quad L\tan\frac{A-B}{2} = 10 + 2\log 2 + \tfrac{1}{2}\log 3 - \log 10$$

$$= 10 + \cdot 6020600 + \cdot 23856065 - 1$$
$$= 9\cdot 84062065.$$

তাহা হইলে স্পষ্টতই, $\frac{A-B}{2} = 34°42' + x''$

$\therefore$ x''-এর জন্য অন্তর $= 9\cdot 84062065 - 9\cdot 8403776$
$= \cdot 00024305.$

এবং প্রদত্ত আছে $1' = 60''$-এর জন্য অন্তর $= \cdot 00026990$

$$\therefore \quad \frac{x''}{60''} = \frac{24305}{26990}; \quad \text{or,} \quad x = \frac{145830''}{2699} = 54'' \text{ (প্রায়)}$$

$$\therefore \quad \frac{A-B}{2} = 34°42'54'' \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \text{(i)}$$

এবং $\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2} = 90° - 30° = 60° \ldots \quad \ldots \quad \ldots \text{(ii)}$

(i) ও (ii) হইতে, $A = 94°\ 42'\ 54''$

এবং $B = 60° - 34°\ 42'\ 54'' = 25°\ 17'\ 6''$.

প্রশ্নমালা 13C

1. ABC ত্রিভুজে $b=\sqrt{3}$, $c=1$ এবং $A=30^\circ$ হইলে ত্রিভুজটি সমাধান কর। [C. U. '51]

2. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু 80 এবং 100 ফুট এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° ; অপর কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 3 = \cdot 47712$ এবং $L \tan 10^\circ 53' 36'' = 9\cdot 28432$. [C. U. '23, '46]

3. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু 3 ও 5 ফুট এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 120° ; অপর কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 4\cdot 8 = \cdot 6812412$,

$L \tan 8^\circ 12' = 9\cdot 1586706$, 1′-এর জন্য অন্তর $= 8940$. [C. U. '49]

4. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু 14 ও 11 এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°, অপর কোণদ্বয় নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 4771213$,

$L \tan 11^\circ 44' = 9\cdot 3174299$, $L \tan 11^\circ 45' = 9\cdot 3180640$.

[C. U. '44, B· H. U. '54]

5. কোন ত্রিভুজে $b = 2\cdot 25$, $c = 1\cdot 75$, $A = 54^\circ$; B এবং C নির্ণয় কর। প্রদত্ত আছে $\log 2 = \cdot 30103$, $L \tan 63^\circ = 10\cdot 292834$,

$L \tan 13^\circ 47' = 9\cdot 389724$, $L \tan 13^\circ 48' = 9\cdot 390270$.

[C. U. '31, Pat. U. '41]

6. $a = 21$, $b = 11$, $C = 34^\circ 42' 30''$ হইলে A এবং B নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 30103$, $L \tan 72^\circ 38' 45'' = 10\cdot 50515$. [B. H. U. '47]

7. প্রদত্ত আছে $a = 70$, $b = 35$, $C = 36^\circ 52' 12''$, $\log 3 = \cdot 4771213$, $L \cot 18^\circ 26' 6'' = 10\cdot 4771213$; A ও B নির্ণয় কর।

[C. U. '37, Pat U. '45]

8. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর অনুপাত 9 : 7 এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ 64°12′ ; অপর কোণ দুইটি নির্ণয় কর। প্রদত্ত আছে $\log 2 = \cdot 30103$, $L \tan 57^\circ 54' = 10\cdot 2025255$, $L \tan 11^\circ 16' = 9\cdot 2993126$, $L \tan 11^\circ 17' = 9\ 2999804$.

[Pat. U. '60, A. U. '54]

9. যদি কোন ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে এবং বৃহত্তম বাহু ও ক্ষুদ্রতম বাহু যথাক্রমে 24 ও 16 ফুট হয়, তবে তৃতীয় বাহুটি এবং কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 3 = \cdot 4771213$, $L \tan 19°6' = 9\cdot 5394287$ এবং $1'$-এর জন্য অন্তর $= 4084$. [Pat. U. '49]

72. দুইটি কোণ এবং একটি বাহু দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজ সমাধান।

মনে কর, ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণ A ও B এবং যে কোন একটি বাহু a দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে, অর্থাৎ C কোণ এবং বাহু b ও c নির্ণয় করিতে হইবে।

তৃতীয় কোণ $C = 180° - (A + B)$. C নির্ণয় করিবার পর $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, এই সূত্র হইতে b ও c জানা যাইবে।

উদা. কোন ত্রিভুজে $a = 10$, $A = 51°30'40''$, $B = 76°$; b নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 12396 = 4\cdot 0932816$, $\log 12397 = 4\cdot 0933196$.

$L \sin 51°30' = 9\cdot 8935444$, $L \sin 51°31' = 9\cdot 8936448$

$L \sin 76° = 9\cdot 9869041$. [A. U. '46]

$$\because \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad \therefore \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

$$\therefore \quad \log b = \log \frac{a \sin B}{\sin A} = \log a + \log \sin B - \log \sin A$$

$$= \log a + (10 + \log \sin B) - (10 + \log \sin A)$$

$$= \log 10 + L \sin B - L \sin A$$

$$= 1 + L \sin 76° - L \sin 51°31'40''$$

এখন, $L \sin 51°31' = 9\cdot 8936448$

এবং, $L \sin 51°30' = 9\cdot 8935444$

$1'$-এর জন্য অন্তর $= \cdot 0001004$

$\therefore$ $40''$ „ „ „ $= \cdot 0001004 \times \frac{40}{60} = \cdot 0000669$.

$\therefore$ $L \sin 51°30'40'' = 9\cdot 8935444 + \cdot 0000669 = 9\cdot 8936113$.

$\therefore$ $\log b = 1 + 9\cdot 9869041 - 9\cdot 8936113 = 1\cdot 0932928$.

এখন, $\log 12397 = 4{\cdot}0933196$

এবং, $\log 12396 = 4{\cdot}0932816$

$\therefore$ 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= {\cdot}0000350$

$\therefore$ যে সংখ্যার লগ $= 4{\cdot}0932928$ তাহা $12396 + x$ হইবে এবং, x-এর জন্য অন্তর $= 4\ 0932928 - 4{\cdot}0932816 = {\cdot}0000112$

$\therefore \quad x = \dfrac{112}{350} = {\cdot}32.$

স্থতরাং, $\log 12396{\cdot}32 = 4{\cdot}0932928.$

$\therefore \quad \log b = 1{\cdot}0932928 = \log 12{\cdot}39632$

or, $b = 12{\cdot}39632.$

প্রশ্নমালা 13D

1. $B = 45°$, $C = 10°$, $a = 200$ ফুট হইলে b নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = {\cdot}3010300$, $L \sin 55° = 9{\cdot}9133645$, $\log 1726{\cdot}4 = 3{\cdot}2371414$, $\log 1726{\cdot}5 = 3{\cdot}2371666$. [C. U. '47, Pat. U. '40]

2. $A = 60°15'$, $B = 54°30'$ এবং $c = 100$ ফুট হইলে b নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 8{\cdot}9646162 = {\cdot}9525317$, $L \sin 54°30' = 9{\cdot}9106860$,

$L \sin 65°15 = 9{\cdot}9581543$.

3. $b = 10$, $A = 45°$, $B = 66°42'20''$; a নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 7{\cdot}698622 = {\cdot}8864131$, $L \sin 66°42' = 9{\cdot}9630538$ এবং $1'$-এর জন্য অন্তর $= 544$. [C. U. '06]

4. $a = 19$, $B = 52°28'$, $C = 93°40'$, b নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 19 = 1{\cdot}2787536$, $L \sin 52°28' = 9{\cdot}8992727$,

$L \sin 33°52' = 9{\cdot}7460595$, $\log 27037 = 4{\cdot}4319585$,

$\log 27038 = 4{\cdot}4319746$. [Pat. U. '36]

73. দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজ সমাধান।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের a ও b বাহু এবং A কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে, অর্থাৎ বাহু c এবং কোণ B ও C নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, প্রদত্ত তথ্যগুলি এরূপ হইতে পারে যে উহাদের সাহায্যে কোন ত্রিভুজই অঙ্কন সম্ভব নয়, বা একটি ত্রিভুজ বা কখনও দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব।

আমরা জানি, $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$, or, $\sin B=\dfrac{b \sin A}{a}$

ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইলে উপরোক্ত সূত্র হইতে B-এর সম্ভাব্য মান পাওয়া যাইবে। অতএব উহা হইতে C এবং বাহু c-এর মানও পাওয়া যাইবে। এখন, a, b, ও A-র বিভিন্ন মান অনুযায়ী তিন প্রকার বিভিন্ন অবস্থার উদ্ভব হইতে পারে :—

Case I. $b \sin A > a$, or, $\dfrac{b \sin A}{a} > 1$ হইলে $\sin B > 1$ হইবে; কিন্তু কোন কোণের sine, 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না বলিয়া ইহা অসম্ভব। অতএব এক্ষেত্রে কোন ত্রিভুজ সম্ভব হইবে না।

Case II. $b \sin A = a$, or, $\dfrac{b \sin A}{a} = 1$ হইলে $\sin B = 1$ হইবে, অর্থাৎ $B = 90°$ হইবে।

এক্ষেত্রে স্পষ্টতই $a \ngtr b$ [কারণ তাহা না হইলে $\sin A > 1$ হইয়া যায়]।

সুতরাং, (i) $a < b$ হইলে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে যেখানে $B = 90°$ হইবে, অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।

(ii) $a = b$ হইলে, $A = B$ হইবে। অতএব কোন ত্রিভুজ সম্ভব নয়, কারণ কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ 90° হইতে পারে না।

Case III. $b \sin A < a$ হইলে $\sin B < 1$ হইবে। এক্ষেত্রে B-র দুইটি মান হইতে পারে, একটি 0° হইতে 90° এর মধ্যবর্তী এবং অপরটি 90° হইতে 180°-এর মধ্যবর্তী [যেহেতু কোন কোণ ও উহার সম্পূরক কোণের sine সমান]। কিন্তু ঐ দুইটি মান সর্বক্ষেত্রে গ্রহণীয় নাও হইতে পারে।

(i) যদি $a<b$ হয় তবে $A<B$ হইবে। অতএব এক্ষেত্রে B-এর সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ দুইটি মানই গ্রহণীয় এবং প্রদত্ত তথ্যগুলির সাহায্যে দুইটি ত্রিভুজ নির্ণয় করা সম্ভব। ইহাকে ত্রিভুজ সমাধানের ক্ষেত্রে দ্ব্যর্থক অবস্থা (Ambiguous case) বলে। এক্ষেত্রে A সূক্ষ্মকোণ এবং B-এর দুইটি মান পরস্পরের সম্পূরক।

(ii) $a=b$ হইলে $A=B$ হইবে। অতএব এক্ষেত্রে B-এর যে মানটি সূক্ষ্মকোণ তাহাই গ্রহণীয় এবং একটি মাত্র ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

(iii) $a>b$ হইলে $A>B$ হইবে। সুতরাং B-এর যে মানটি স্থূলকোণ তাহা গ্রহণীয় নয়। অতএব এক্ষেত্রে সূক্ষ্মকোণ B গ্রহণ করিতে হইবে এবং একটিমাত্র ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

উপরোক্ত সিদ্ধান্তগুলিকে একত্রে নিম্নে দেওয়া হইল :

ABC ত্রিভুজের a, b এবং A নির্দিষ্ট এবং

(1) যদি, $b \sin A>a$ হয় তবে কোন ত্রিভুজ হইবে না।

(2) যদি, $b \sin A=a$ এবং $a=b$ হয় তবে কোন ত্রিভুজ হইবে না।

কিন্তু যদি, $b \sin A=a$ এবং $a<b$ হয় তবে একটি মাত্র ত্রিভুজ হইবে।

(3) যদি, $b \sin A<a$ এবং $a\geqslant b$ হয় তবে একটি মাত্র ত্রিভুজ হইবে।

এবং যদি, $b \sin A<a$ এবং $a<b$ হয় তবে দুইটি ত্রিভুজ হইবে

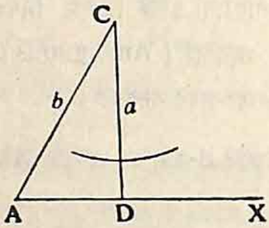
(দ্ব্যর্থক অবস্থা)।

যেখানে সম্ভব B-এর মান নির্ণয় করিয়া $C=180°-(A+B)$ হইতে কোণ C-এর মান এবং $c=\dfrac{a \sin C}{\sin A}$, or, $c=\dfrac{b \sin C}{\sin B}$ হইতে বাহু c-এর মান নির্ণয় করা যায়। যেখানে B-এর দুইটি মান সম্ভব (দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রে) সেখানে C এবং c এরও দুইটি মান হইবে।

74. দ্ব্যর্থক অবস্থার জ্যামিতিক আলোচনা (Geometrical discussions of the ambiguous case)।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের a, b এবং A দেওয়া আছে। যে কোন সরলরেখা AX লও এবং A বিন্দুতে প্রদত্ত A কোণের সমান $\angle XAC$ অংকন কর ; $CA=b$ লও। AX এর উপর CD লম্ব টান। তাহা হইলে,

$\frac{CD}{CA} = \sin A$, or, $CD = CA \sin A = b \sin A$.

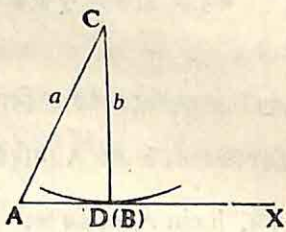


চিত্র 29

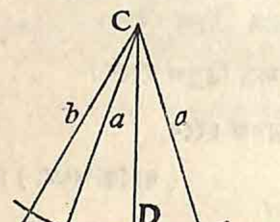
এখন C কে কেন্দ্র করিয়া a ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

(1) যদি $a < b \sin A$ অর্থাৎ $a <$ CD হয় তবে বৃত্তটি AX কে ছেদ করিবে না। অতএব এক্ষেত্রে কোন ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে না। [পার্শ্বের চিত্র দেখ।]

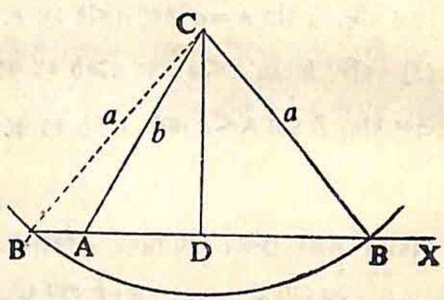
(2) যদি $a = b \sin A$ অর্থাৎ $a =$ CD হয়, তবে বৃত্তটি AX সরলরেখাকে D (B) বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। অতএব এক্ষেত্রে ABC সমকোণী ত্রিভুজটি ($\angle B$ সমকোণ) পাওয়া যাইবে। এখানে $\angle A$ অবশ্যই সূক্ষ্মকোণ ; অতএব $a < b$ হইবে।



চিত্র 30



চিত্র (i)



চিত্র (ii)

চিত্র 31

(3) যদি $a > b \sin A$ অর্থাৎ $a >$ CD হয়, তবে বৃত্তটি AX সরলরেখাকে দুইটি ভিন্ন বিন্দু, মনে কর B এবং B′ বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(i) যদি $a < b$ (কিন্তু $a > b \sin A$) হয়, তবে B ও B′ বিন্দুদ্বয় A বিন্দুর একই পার্শ্বে পড়িবে। অতএব এক্ষেত্রে ACB ও ACB′ দুইটি ত্রিভুজই সম্ভব। ACB ত্রিভুজে B কোণ সূক্ষ্মকোণ এবং ACB′ ত্রিভুজে $\angle AB'C$ স্থূলকোণ। $a < b$ বলিয়া A কোণ অবশ্যই সূক্ষ্মকোণ [চিত্র (i)]। ইহাই দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র।

(ii) যদি $a>b$ হয়, তবে B ও B′ বিন্দুদ্বয় A বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে পড়িবে [চিত্র (ii)]। এখানে একমাত্র ACB ত্রিভুজই নির্ণেয় সমাধান হইবে। কারণ ACB′ ত্রিভুজে ∠CAB′ প্রদত্ত A কোণের সমান না হইয়া উহার সম্পূরক কোণের সমান হইবে।

(iii) যদি $a=b$ হয় তবে B′ বিন্দু A বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে। অতএব তখন একমাত্র সমাধান হইবে ত্রিভুজ ACB.

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. সম্ভব হইলে ত্রিভুজটি সমাধান কর ; প্রদত্ত আছে

$$a=2, \quad b=6, \quad A=30°.$$

$$\sin B=\frac{b \sin A}{a}=\frac{6 \sin 30°}{2}=\frac{6\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{2}>1.$$

∴ এক্ষেত্রে ত্রিভুজ হইবে না ; সুতরাং সমাধান সম্ভব নহে।

উদা. 2. $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $A=30°$ হইলে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

আমরা জানি, $\sin B=\frac{b \sin A}{a}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

∴ $B=45°$ or, $135°$ তাহা হইলে $C=105°$ or, $15°$.

যেহেতু এখানে $a<b$, অতএব দুইটি মানই গ্রহণীয়।

$$\therefore\ c=\frac{a \sin C}{\sin A}=\frac{\sin 105°}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\times\frac{2}{1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

অথবা $c=\frac{1\times\sin 15°}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\times\frac{2}{1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$

উদা. 3. $a=200$ ফুট, $b=250$ ফুট, $A=30^\circ$; B, C এবং বাহু c এর ক্ষুদ্রতর মান নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2=\cdot3010300$, $\log 6\cdot03892=\cdot7809601$, $L\sin 38^\circ41'=9\cdot7958800$ এবং $L\sin 8^\circ41'=9\cdot1789001$.

[Pat. U. '42]

আমরা জানি, $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$

$$=\frac{250\times\sin 30^\circ}{200}=\frac{250\times\frac{1}{2}}{200}=\frac{125}{200}=\tfrac{5}{8}=\tfrac{10}{16}.$$

$$\therefore\ L\sin B=10+\log 10-4\log 2=11-4\times\cdot3010300$$

$$=11-1\cdot2041200=9\cdot7958800=L\sin 38^\circ41'$$

$\therefore\ B=38^\circ41'$ অথবা, $B=180^\circ-38^\circ41'=141^\circ19'$.

এখন যেহেতু প্রদত্ত তথ্য হইতে দেখা যায় যে, $a<b$; অতএব B র দুইটি মানই গ্রহণীয়। সুতরাং C র দুইটি অনুরূপ মান হইতেছে,

$$C=180^\circ-(30^\circ+38^\circ41')=111^\circ19'.$$

অথবা, $C=180^\circ-(30^\circ+141^\circ19')=8^\circ41'$.

$$\therefore\ c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{200\ .\ \sin 8^\circ41'}{\sin 30^\circ}=400\ .\ \sin 8^\circ41'.$$

$\therefore\ 10+\log c=\log 400+L\sin 8^\circ41'$

or, $\log c=2+2\log 2+L\sin 8^\circ41'-10$

$$=2+\cdot6020600+9\cdot1789001-10$$

$$=1\cdot7809601=\log 60\cdot3892$$

[$\because\ \log 6\cdot03892=\cdot7809601$.]

$\therefore\ c=60\cdot3892$ ফুট।

উদা 4. a, b, A প্রদত্ত থাকিলে এবং দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রে c এর দুইটি মান c_1 ও c_2 হইলে প্রমাণ কর যে, $c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos 2A=4a^2\cos^2 A$.

[B. H. U. '35, Pat. U. '51]

আমরা জানি, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\therefore$ $2bc \cos A = b^2+c^2-a^2$

or, $c^2 - 2b \cos A \,.\, c + b^2 - a^2 = 0,$

ইহা c-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; মনে কর ইহার বীজদ্বয় c_1, c_2

$\therefore$ $c_1 + c_2 = 2b \cos A$ এবং, $c_1c_2 = b^2 - a^2,$

এখন, $c_1{}^2 + c_2{}^2 - 2c_1c_2 \cos 2A$

$= (c_1+c_2)^2 - 2c_1c_2 - 2c_1c_2 \cos 2A$

$= (c_1+c_2)^2 - 2c_1c_2(1+\cos 2A)$

$= 4b^2 \cos^2 A - 2(b^2 - a^2)\, 2\cos^2 A = 4a^2 \cos^2 A.$

প্রশ্নমালা 13E

1. $a=100$, $b=100\sqrt{2}$, $A=30^\circ$; ত্রিভুজটি সমাধান কর।

[A. U. '52]

2. $a=5$, $b=7$ এবং $A=30^\circ$ হইলে B-এর মান ডিগ্রী ও মিনিটে নির্ণয় কর। প্রদত্ত আছে $\sin 44^\circ = \cdot 6947$, $\sin 45^\circ = \cdot 7071$. [C. U. '29]

3. কোন ত্রিভুজ ABC-তে $a=5$, $b=4$, $A=45^\circ$; অবশিষ্ট কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot 3010300$, $L \sin 34^\circ 26' = 9\cdot 7523919$, $L \sin 34^\circ 27' = 9\cdot 7525761$. [A. U. '56]

4. $a=30$, $b=300$ হইলে A-র এমন মান নির্ণয় কর যাহাতে $B=90^\circ$ হইতে পারে। প্রদত্ত আছে, $L \sin 5^\circ 44' = 8\cdot 9995595$, $1'$-এর জন্য অন্তর $= \cdot 0012565$.

[Pat. U. '46]

5. $a=573$, $b=394$ এবং, $A=112^\circ 4'$; অবশিষ্ট কোণগুলি নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $\log 5\cdot 73 = \cdot 7581546$, $\log 3\cdot 94 = \cdot 5954962$,

$L \cos 22^\circ 4' = 9\cdot 9669614$, $L \sin 39^\circ 35' = 9\cdot 8042757$,

$L \sin 39^\circ 36' = 9\cdot 8044284$. [A. U. '39]

6. $a=5$ ফুট, $b=8$ ফুট, $A=35^\circ$; বাহু c-এর ক্ষুদ্রতর মানটি নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 456706 = 5\cdot 659637$,

$L \sin 35^\circ = 9\cdot 758591$, $L \sin 31^\circ 35' 43'' = 9\cdot 719261$,

$L \sin 66^\circ 36' = 9\cdot 962727$, $L \sin 66^\circ 35' = 9\cdot 962672$.

[A. U. '13]

7. যদি a, b এবং A প্রদত্ত থাকে এবং দ্ব্যর্থকক্ষেত্রে c-এর দুইটি মান c_1 ও c_2 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $c_1 - c_2 = 2a \cos B_1$ [$c_1 > c_2$ এবং B-এর সূক্ষ্মকোণের মান B_1 ধরিয়া।] [B. H. U. '28]

8. a, b, A-এর মান প্রদত্ত থাকিলে এবং দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র হইলে প্রমাণ কর যে, c এর দুইটি মানের অন্তর হইতেছে $2\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$. [A. U. '52]

9. ত্রিভুজ সমাধানের দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রে a, b এবং A প্রদত্ত থাকিলে এবং c-এর দুইটি মান c_1 ও c_2 হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\cos \frac{c_1 - c_2}{2} = \frac{b \sin A}{a}$$ [A. U. '41]

10. দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে c-এর দুইটি মান,

$$\frac{(a+b)^2}{1+\cos C} + \frac{(b-a)^2}{1-\cos C} = \frac{2a^2}{\sin^2 A}$$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

[B. H. U. '42]

চতুর্দশ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ

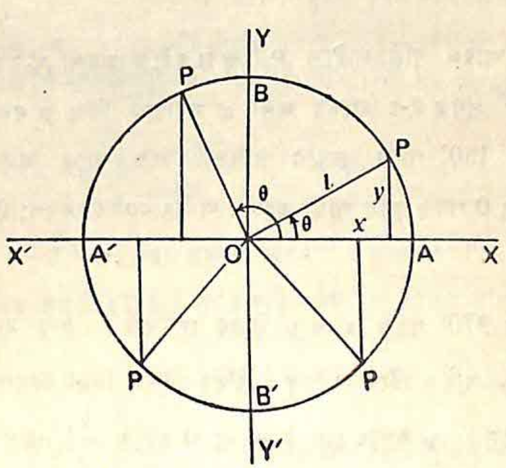
(Graphs of Trigonometric Functions)

75. ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের পরিবর্তন (Changes in Trigonometric Functions)**ঃ**

কোণের মানের পরিবর্তন হইলে উহার অনুরূপ ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের মানের পরিবর্তন হয়। কোণের মান 0° হইতে 360° পর্যন্ত ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইলে উহার কোণানুপাতগুলির মানের কিরূপ পরিবর্তন হয় তাহা আলোচনা করাই যথেষ্ট। কারণ অন্যান্য যে কোন কোণের ক্ষেত্রে অন্তিম বাহুর এমন কোন নূতন অবস্থান হইবে না যাহা ওই আলোচনার অন্তর্ভুক্ত নয়; সুতরাং নূতন কোন কোণানুপাতের মানও পাওয়া যাইবে না।

76. θ **কোণের sine ও cosine এর মানের পরিবর্তন।**

মনে কর, θ আদর্শ অবস্থানে (Standard position) আছে। উৎপাদক



চিত্র 32

রেখা (generating line) OP উহার প্রাথমিক অবস্থান OX হইতে ঘড়ির কাঁটার

বিপরীত দিকে পুরা এক পাক ঘুরিয়া পুনরায় OX অবস্থানে আসিলে কোণের পরিমাণ 360° হইবে। যেহেতু কোণের পরিমাণ উৎপাদক রেখার দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর করে না, অতএব কোণানুপাত সম্বন্ধে আলোচনার ক্ষেত্রে OP একক দৈর্ঘ্যের ধরা যাইতে পারে। এখন O কে কেন্দ্র করিয়া OP=1 ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে θ-র মান যেমন 0° হইতে 360° পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে, P বিন্দুও তেমন ঐ বৃত্তের পরিধির উপর দিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে অগ্রসর হইবে। OP-র যে কোন অবস্থানে, অর্থাৎ θ-র যে কোন মানের জন্য,

$$\sin\theta = \frac{\text{কোটি}}{\text{রেডিয়াস ভেক্টর}} = \frac{y}{1} = y$$

এবং $$\cos\theta = \frac{\text{ভুজ}}{\text{রেডিয়াস ভেক্টর}} = \frac{x}{1} = x$$

ভুজ ও কোটির যথাযথ চিহ্ন সহ।

0° হইতে 90° পর্যন্ত x ও y উভয়ই ধনাত্মক। θ-র মান ক্রমশঃ 0° হইতে 90° পর্যন্ত বর্দ্ধিত হইতে থাকিলে P ক্রমশঃ A হইতে B এর দিকে পরিধির উপর দিয়া অগ্রসর হয়; y এর মান ক্রমশঃ 0 হইতে 1 পর্যন্ত বর্ধিত হয় এবং x এর মান ক্রমশঃ 1 হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায়। অতএব $\sin\theta$ ক্রমাগত 0 হইতে 1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় এবং $\cos\theta$ ক্রমাগত 1 হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

θ-র মান আরও বৃদ্ধি পাইলে P বিন্দু B হইতে ক্রমশঃ A′-র দিকে অগ্রসর হয়। 90° হইতে 180° পর্যন্ত θ-র মানের জন্য x ঋণাত্মক কিন্তু y ধনাত্মক। θ-র মান যত 90° হইতে 180° পর্যন্ত ক্রমশঃ বর্ধিত হইতে থাকে তত y অর্থাৎ $\sin\theta$, 1 হইতে ক্রমশঃ 0 পর্যন্ত হ্রাস পায় এবং x অর্থাৎ $\cos\theta$ ক্রমশঃ 0 হইতে -1 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

180° হইতে 270° পর্যন্ত x ও y উভয় ঋণাত্মক। θ-র মান ক্রমাগত 180° হইতে 270° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে P বিন্দু পরিধির উপর দিয়া ক্রমশঃ A′ হইতে B′ এর দিকে অগ্রসর হয়। y অর্থাৎ $\sin\theta$ ক্রমশঃ 0 হইতে -1 পর্যন্ত হ্রাস পায় এবং x অর্থাৎ $\cos\theta$ ক্রমশঃ -1 হইতে 0 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

270° হইতে 360° পর্যন্ত x ধনাত্মক কিন্তু y ঋণাত্মক। θ-র মান ক্রমশঃ 270°

হইতে 360° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে P ক্রমশঃ B′ হইতে A-র দিকে অগ্রসর হইতে থাকে। y অর্থাৎ $\sin\theta$ ক্রমশঃ -1 হইতে 0 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় এবং x অর্থাৎ $\cos\theta$ ক্রমশঃ 0 হইতে 1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

সুতরাং পূর্ব পৃষ্ঠার আলোচনার ফলকে সংক্ষেপে প্রকাশ করিলে :

(a) θ, 0° হইতে 90° পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে,

$\sin\theta$, 0 হইতে 1 পর্যন্ত বর্দ্ধিত হয় এবং $\cos\theta$, 1 হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

(b) θ, 90° হইতে 180° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে,

$\sin\theta$, 1 হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায় এবং $\cos\theta$, 0 হইতে -1 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

(c) θ, 180° হইতে 270° পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে,

$\sin\theta$, 0 হইতে -1 পর্যন্ত হ্রাস পায় এবং $\cos\theta$, -1 হইতে 0 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

(d) θ, 270° হইতে 360° পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে,

$\sin\theta$, -1 হইতে 0 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় এবং $\cos\theta$, 0 হইতে 1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

77. θ কোণের tangent এর মানের পরিবর্তন।

θ-র যে কোন মানে, $\tan\theta = \frac{\text{কোটি}}{\text{ভুজ}} = \frac{y}{x}$ [পূর্বের চিত্র দেখ]

$\theta = 0^\circ$ হইলে $y = 0$ বলিয়া $\tan\theta = 0$, এখন θ-র মান যত 0° হইতে 90° পর্যন্ত বর্ধিত হয়, y-এর মান তত 0 হইতে 1 পর্যন্ত বর্ধিত হয় এবং x এর মান তত 1 হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায়। অতএব $\frac{y}{x}$ অর্থাৎ $\tan\theta$-র মান ক্রমশঃ বর্দ্ধিত হয়। θ যখন 90° এর অতি নিকটবর্তী হয় তখন x-র মান অতি ক্ষুদ্র হয় বলিয়া $\tan\theta$-র মান অতি বৃহৎ হয়। বস্তুতপক্ষে, 90° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মান হইতে θ-কে 90°-এর যথেষ্ট নিকটবর্তী করিয়া $\tan\theta$ এর মান যথেচ্ছ বৃহৎ করা যায়। অর্থাৎ θ, 0° হইতে 90° পর্যন্ত বর্ধিত

হইলে tan θ-র মান 0 হইতে ∞ পর্যন্ত বর্ধিত হয় (tan θ increases from 0 to ∞ as θ increases from 0° to 90°)।

যখন θ বাস্তবিক 90°-র সমান তখন $x=0$; সুতরাং tan θ-র মান তখন অর্থহীন।

আবার আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি (অনু : 76) যে θ, 90° হইতে 180° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে y-এর মান 1 হইতে 0 পর্যন্ত এবং x-এর মান 0 হইতে -1 পর্যন্ত হ্রাস পায়। অতএব অন্যভাবে বলা যায় যে, θ-র মান 180° হইতে 90° পর্যন্ত ক্রমাগত হ্রাস পাইলে, y-এর মান 0 হইতে 1 পর্যন্ত এবং x এর মান -1 হইতে 0 পর্যন্ত বর্ধিত হয় ; সুতরাং tan θ-র মান 0 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পায়। অর্থাৎ θ, 90° হইতে 180° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে tan θ, $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, 90°-র অতি নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য tan θ-র **সাংখ্য মান** অতিবৃহৎ। $\theta^\circ < 90^\circ$ হইলে ঐ মানগুলি ধনাত্মক এবং $0^\circ > 90^\circ$ হইলে ঐ মানগুলি ঋণাত্মক। কিন্তু $\theta = 90^\circ$-র জন্য tan θ-র কোন মান নাই। অর্থাৎ θ প্রথম পাদ হইতে দ্বিতীয় পাদে 90°-র সীমা অতিক্রম করিবার কালে tan θ সহসা $+\infty$ হইতে $-\infty$-তে উল্লফন দেয় [tan θ suddenly jumps from $+\infty$ to $-\infty$ as θ passes through 90° from the 1st to the 2nd quadrant.]। অতএব $\theta = 90^\circ$-তে tan θ-র মানের বিচ্ছিন্নতা (discontinuity) ঘটে।

সেইরূপ θ, 180° হইতে 270° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, tan θ-র মান 0 হইতে ∞ পর্যন্ত বর্ধিত হয় এবং θ, 270° হইতে 360° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে tan θ-র মান $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত বর্ধিত হয় ; কিন্তু $\theta = 270^\circ$-র জন্য tan θ-র কোন মান নাই। সুতরাং θ তৃতীয় পাদ হইতে চতুর্থ পাদে 270°-র সীমা অতিক্রম করিবার কালে tan θ আর একবার $+\infty$ হইতে $-\infty$-তে উল্লফন দেয় ; অর্থাৎ $\theta = 270^\circ$-তে tan θ-র মানের আর একটি বিচ্ছিন্নতা ঘটে।

78. cot θ-র পরিবর্তন।

cot θ ও tan θ পরস্পর অন্যোন্যক ; অর্থাৎ cot $\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$. সুতরাং tan θ-র

মানের পরিবর্তন হইতেই $\cot \theta$-র মানের পরিবর্তন সম্বন্ধে ধারণা করা যাইবে। সংক্ষেপে বলা যায় ;

$\theta = 0°$ হইলে $\cot \theta$-র কোন মান নাই।

θ, $0°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\cot \theta$, $+\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

θ, $90°$ হইতে $180°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\cot \theta$, 0 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পায়।

যখন $\theta = 180°$ তখন $\cot \theta$ অনির্দিষ্ট এবং θ দ্বিতীয় পাদ হইতে তৃতীয় পাদে $180°$ মান অতিক্রম করিবার কালে $\cot \theta$-র মান সহসা $-\infty$ হইতে $+\infty$ হইয়া যায়। অতএব $\theta = 180°$-তে $\cot \theta$-র মানের বিচ্ছিন্নতা ঘটে।

আবার, θ, $180°$ হইতে $270°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে $\cot \theta$, $+\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

এবং, θ, $270°$ হইতে $360°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে $\cot \theta$, 0 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পায়।

$\theta = 360°$-তে $\cot \theta$ অনির্দিষ্ট। θ চতুর্থ পাদ হইতে প্রথম পাদে $360°$ অতিক্রম করিলেই $\cot \theta$-র মান সহসা $-\infty$ হইতে $+\infty$ হইয়া যায়। সুতরাং $\theta = 360°$ (বা $0°$) তে $\cot \theta$-র মানের বিচ্ছিন্নতা ঘটে।

79. $\sec \theta$-র পরিবর্তন।

$\sec \theta$, $\cos \theta$-র অন্যোন্যক। সুতরাং $\sec \theta$-র পরিবর্তন নিম্নরূপ : θ, $0°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে $\sec \theta$, 1 হইতে ∞ পর্যন্ত বর্ধিত হয়। $\theta = 90°$-তে $\sec \theta$ অনির্দিষ্ট। θ-র মান $90°$ অতিক্রম করিবার কালে $\sec \theta$ সহসা $+\infty$ হইতে $-\infty$-তে পরিবর্তিত হয়।

θ, $90°$ হইতে $180°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে $\sec \theta$, $-\infty$ হইতে -1 পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

θ, $180°$ হইতে $270°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে $\sec \theta$, -1 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পায়।

$\theta=270°$-তে, sec θ অনির্দিষ্ট এবং θ, $270°$ অতিক্রম করিবার কালে sec θ-র মান সহসা $-\infty$ হইতে $+\infty$-তে পরিবর্তিত হয়।

θ, $270°$ হইতে $360°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে sec θ, $+\infty$ হইতে 1 পর্যন্ত হ্রাস পায়। সুতরাং $\theta=90°$ এবং $\theta=270°$-তে sec θ-র মানে বিচ্ছিন্নতা ঘটে।

80. cosec θ-র পরিবর্তন।

cosec θ, sin θ এর অন্যোন্যক। সুতরাং cosec θ-র পরিবর্তন নিম্নরূপ : $\theta=0°$-তে cosec θ অনির্দিষ্ট।

θ, $0°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে cosec θ, $+\infty$ হইতে 1 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

θ, $90°$ হইতে $180°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে cosec θ, 1 হইতে $+\infty$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

$\theta=180°$-তে cosec θ অনির্দিষ্ট। θ-র মান $180°$ অতিক্রম করিবার কালে cosec θ সহসা $+\infty$ হইতে $-\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

θ, $180°$ হইতে $270°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে cosec θ, $-\infty$ হইতে -1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

θ, $270°$ হইতে $360°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে cosec θ, -1 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পায়।

$\theta=360°$ (বা $0°$) তে cosec θ অনির্দিষ্ট। θ-র মান $360°$ অতিক্রম করিবার কালে cosec θ সহসা $-\infty$ হইতে $+\infty$-তে পরিবর্তিত হয়।

সুতরাং $\theta=0°$ এবং $\theta=180°$-তে cosec θ-র মানে বিচ্ছিন্নতা ঘটে।

81. ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের পর্য্যাবৃত্ততা (Periodicity of Trigonometric Functions)।

যেহেতু $\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta$, $\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$, $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$;

অতএব 2π ব্যবধানে sine এবং cosine-এর এবং π ব্যবধানে tangent-এর মানের পুনরাবৃত্তি ঘটে। কোণের পরিমাণের নিয়মিত ব্যবধানে অপেক্ষকগুলির মানের পুনরাবৃত্তি ঘটে বলিয়া অপেক্ষকগুলিকে পর্য্যাবৃত্ত অপেক্ষক (Periodic Functions) বলে। $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$-এর পর্য্যায় বা ব্যবধান (Period) হইতেছে 2π এবং $\tan\theta$ ও $\cot\theta$-এর পর্য্যায় হইতেছে π.

82. ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ।

বীজগণিতের ন্যায়ই ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ অংকন করা হয়। ছক কাগজে XOX′ ও YOY′ পরস্পর লম্ব সরলরেখাদ্বয়কে অক্ষদ্বয়রূপে নির্বাচন করিয়া চলকোণ (variable angle) x-এর বিভিন্ন মানগুলি ভুজরূপে এবং অনুরূপ ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক y-র বিভিন্ন মানগুলি কোটিরূপে লইয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করিতে হয়। তাহার পরে বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত সন্তত (continuous) রেখা দ্বারা যোগ করিলে অপেক্ষকের লেখটি পাওয়া যায়। বিন্দুগুলি স্থাপন করিবার সময় ভুজ ও কোটির জন্য উপযুক্ত একক নির্বাচনের দিকে লক্ষ্য রাখা প্রয়োজন। এমন ভাবে একক নির্বাচন করিতে হয় যাহাতে লেখটি বেশী বড় বা বেশী ছোট না হইয়া যায়।

83. sin x-এর লেখ (Graph of sin x)।

মনে কর $y=\sin x$. x-এর প্রত্যেক মানের জন্য y অর্থাৎ $\sin x$-এর

x	−90°	−80°	−70°	−60°	−50°	−40°	−30°	−20°	−10°	0°
y or $\sin x$	−1	−·98	−·94	−·87	−·77	−·64	−·50	−·34	−·17	0

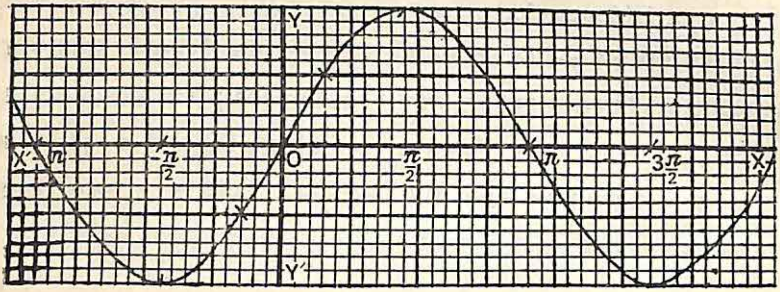
x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	...
y or $\sin x$	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	1	·98	·94	·87	...

চিত্র 33

একটি অনুরূপ মান আছে যাহা স্বাভাবিক সাইন তালিকা হইতে পাওয়া

যাইবে। ঐ তালিকার সাহায্যে x-এর মানের 10° ব্যবধানে (অথবা যে কোন সুবিধামত ব্যবধান 5°, 15°, ইত্যাদি লইয়া) y-এর অনুরূপ মানগুলি দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত (শুদ্ধমান) লইয়া তালিকাবদ্ধ করা হইল।

এখন x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বাহুর 10 গুণকে এক একক ধরিয়া $(-90^\circ, 1)$, $(-80^\circ, -\cdot98)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া নির্ণেয় লেখ পাওয়া গেল।



চিত্র 34

টীকা : (1) তালিকার সাহায্যে $\sin x$-এর মান নির্ণয় করিবার সময় ঋণাত্মক কোণের ক্ষেত্রে $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ এবং 90° অপেক্ষা বৃহত্তর কোণের জন্য $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$ প্রভৃতি সূত্রগুলির প্রয়োজন মত প্রয়োগ করিতে হয়। মনে করা যাক $\sin 100^\circ$-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। এখন $\sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 80^\circ)$ $= \sin 80^\circ = \cdot98$ [তালিকা হইতে]।

আবার $\sin(-100^\circ) = -\sin 100^\circ = -\sin 80^\circ = -\cdot98$.

(2) এখানে $x = -90^\circ$ হইতে $x = 90^\circ$ পর্যন্ত ব্যবধানে লেখটি অংকন করা হইয়াছে।

84. সাইন লেখের কতিপয় বৈশিষ্ট্য :

(i) লেখটি সুসমঞ্জস তরঙ্গাকারে ছেদহীনভাবে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

(ii) 0 হইতে 2π-এর মধ্যবর্তী অংশটুকু π-এর জোড় গুণিতকের ব্যবধানে পুনরাবৃত্ত হইতে থাকে। অর্থাৎ লেখ হইতে বলা যায় যে, সাইন অপেক্ষক পর্য্যাবৃত্ত অপেক্ষক ; পর্য্যায় হইতেছে 2π.

(iii) যে যে স্থলে $x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots\cdots$ইত্যাদি, সেই সকল ক্ষেত্রে $\sin x=0$.

(iv) $\sin x$-এর মান কখনই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর বা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নয়।

85. cos x-এর লেখ।

মনে কর $y=\cos x$.

10° ব্যবধানে x-এর বিভিন্ন মান ও y (অর্থাৎ $\cos x$)-এর অনুরূপ মানগুলি লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

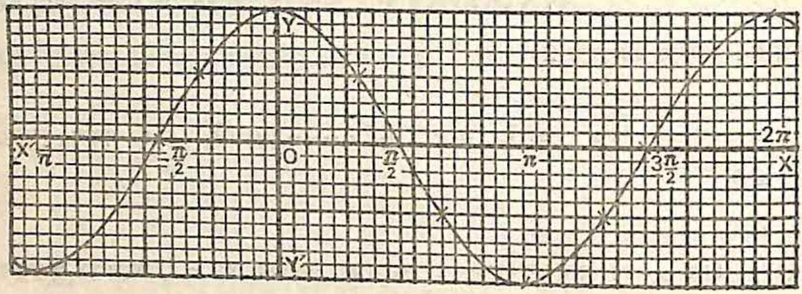
x	−90°	−80°	−70°	−60°	−50°	−40°	−30°	−20°	−10°	0°
y or Cos x	0	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	1

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	---	---
y or Cos x	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0	−·17	−·34	---	---

চিত্র 35

এখন x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর 10 গুণকে এক একক

ধরিয়া $(-90°, 0)$, $(-80°, \cdot17)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং ঐ



চিত্র 36

বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিয়া নির্ণেয় লেখ পাওয়া গেল।

86. tan x-এর লেখ :

মনে কর, $y = \tan x$, $15°$ ব্যবধানে x-এর বিভিন্ন মান এবং y (অর্থাৎ $\tan x$)-এর অনুরূপ মানগুলি লইয়া নিম্নের মত তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

x	$-75°$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$-15°$	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$	$105°$	$120°$
y or $\tan x$	$-3\cdot73$	$-1\cdot73$	-1	$-\cdot58$	$-\cdot27$	0	$\cdot27$	$\cdot58$	1	$1\cdot73$	$3\cdot73$	x	$-3\cdot73$	$-1\cdot73$

x	$135°$	$150°$	$165°$	$180°$	$195°$	$210°$	$225°$	$240°$	$255°$	$270°$	$285°$	- - -
y or $\tan x$	-1	$-\cdot58$	$-\cdot27$	0	$\cdot27$	$\cdot58$	1	$1\cdot73$	$3\cdot73$	x	$-3\cdot73$	- - -

চিত্র 37

x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে $10°$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের 3 গুণকে এক একক ধরিয়া $(-75°, -3\cdot73)$ ইত্যাদি বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং সন্তত রেখা দ্বারা উহাদিগকে পর্যায়ক্রমে যুক্ত করিয়া লেখটি পাওয়া গেল।

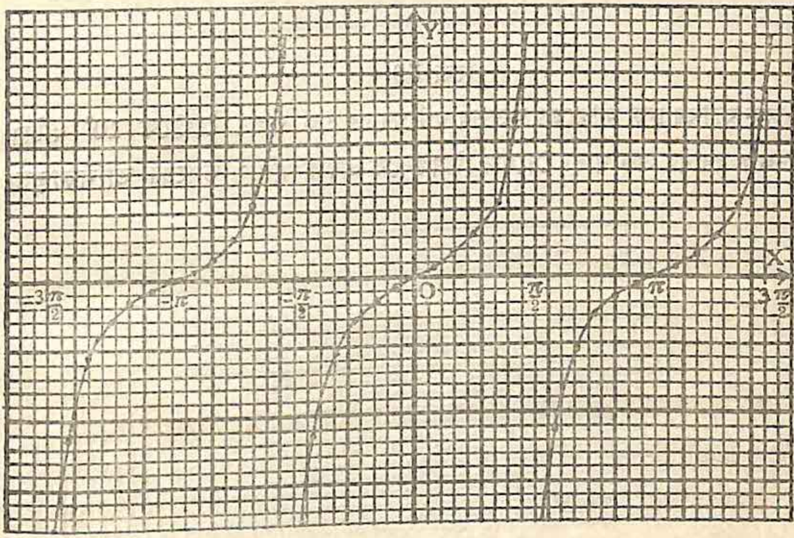
87. ট্যানজেন্ট লেখের কতিপয় বৈশিষ্ট্য :

(i) লেখটি অবিচ্ছিন্ন নয়। যে সকল বিন্দুতে x-এর মান $90°$-এর বিজোড় গুণিতক সেই সকল বিন্দুতে লেখটির বিচ্ছিন্নতা দেখা যায়।

x বামদিক হইতে দক্ষিণদিকে (অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর মান হইতে বৃহত্তর মানে) এই সকল বিন্দু অতিক্রম করিবার কালে $\tan x$-এর মান সহসা $+\infty$ হইতে $-\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

(ii) $-90°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত লেখটির অংশটুকু $90°$ হইতে $270°$, $270°$ হইতে $450°$ ইত্যাদি ব্যবধানে দক্ষিণদিকে এবং $-90°$ হইতে $-270°$, $-270°$ হইতে $-450°$ ইত্যাদি ব্যবধানে বামদিকে পুনরাবৃত্ত হইতে থাকিবে। সুতরাং লেখ হইতে দেখা যায় যে, ট্যানজেণ্ট অপেক্ষক পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক ; পর্যায় হইতেছে π.

(iii) যে সকল বিন্দুতে x-এর মান $90°$-এর বিজোড় গুণিতক সেই সকল বিন্দুতে y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাগুলি ক্রমশঃ লেখের সহিত x-অক্ষের উভয় পার্শ্বে মিলিত



চিত্র 38

হইতে চেষ্টা করে ; কিন্তু কখনও সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যায় না। ঐ রেখাগুলিকে লেখটির অসীমপথ (asymptote) বলে।

88. cot x-এর লেখ :

ছাত্ররা যেন নিজে $\tan x$-এর লেখের অনুরূপে, $y = \cot x$-এর লেখ অঙ্কন করিয়া লয়। লেখ হইতে কোট্যানজেণ্ট লেখের নিম্নলিখিত বৈশিষ্টগুলি দেখা যাইবে।

(i) ট্যানজেণ্ট লেখের মত এই লেখও অবিচ্ছিন্ন নয়। যে সকল বিন্দুতে $x = 0°$ বা, π-এর কোন গুণিতক সেই সকল বিন্দুতে লেখটির বিচ্ছিন্নতা দেখা যায়।

(ii) কোট্যানজেন্ট অপেক্ষক পর্য্যাবৃত্ত অপেক্ষক, পর্য্যায় হইতেছে π.

(iii) যে সকল বিন্দুতে x-এর মান $0°$ বা, π-এর যে কোন গুণিতক, সেই সকল বিন্দুতে y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাসমূহ লেখটির অসীমপথ।

89. cosec x-এর লেখ ঃ

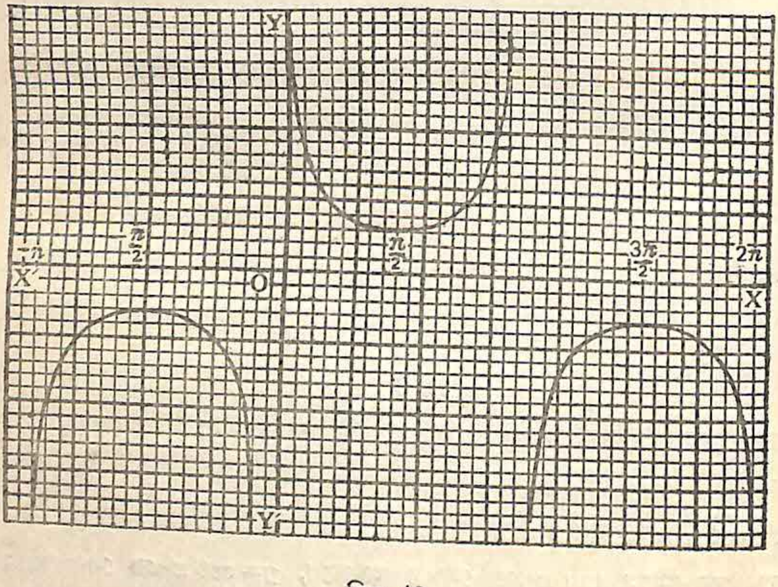
মনে কর, $y = \text{cosec}\, x$.

$10°$ ব্যবধানে x-এর বিভিন্ন মান এবং Natural cosecant Table হইতে y (cosec x)-এর অনুরূপ মানগুলি নিম্নের মত তালিকাভুক্ত করা হইল।

x	−170°	−160°	−150°	−140°	−130°	−120°	−110°	−100°	−90°	---
y or Cosec x	−5·76	−2·92	− 2	−1·56	−1·29	−1·15	−1·06	−1·02	−1	---

চিত্র 39

x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে $10°$ ধরিয়া এবং y-অক্ষ বরাবর এক বাহুর দৈর্ঘ্যের তিনগুণকে একক ধরিয়া উপরের তালিকাভুক্ত



চিত্র 40

বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং পরপর বিন্দুগুলি চিত্রের মত যুক্ত করিয়া নির্ণেয় লেখটি পাওয়া গেল।

90. কোসেক্যান্ট লেখের বৈশিষ্ট্য :

(i) এই লেখটিও অবিচ্ছিন্ন নহে ; যে সকল বিন্দুতে $x=0°$ বা, π-এর কোন গুণিতক সেই সকল বিন্দুতে লেখটির বিচ্ছিন্নতা দেখা যায়।

(ii) লেখটির কোন অংশ $y=1$ এবং $y=-1$ এর মধ্যবর্তী হইবে না। কারণ y (অর্থাৎ cosec x)-এর মান সর্বদাই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। সুতরাং $0°$ হইতে $180°$-এর মধ্যে লেখটি x-অক্ষের উপরে এবং $-180°$ হইতে $0°$ এবং $180°$ হইতে $360°$-এর মধ্যে লেখটি x-অক্ষের নীচে থাকিবে।

(iii) ইহাও একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক এবং পর্যায় হইতেছে 2π.

91. sec x-এর লেখ :

এই লেখটি cosec x-এর লেখের অনুরূপে অঙ্কন করিতে হইবে।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. $x=0$ হইতে $x=2\pi$ সীমার মধ্যে $y=\sin x+\cos x$-এর লেখ অঙ্কন কর। লেখ হইতে x-এর এমন মান নির্ণয় কর যেখানে,

(i) $y=0$, (ii) y সর্বোচ্চ, (iii) y সর্বনিম্ন। [C. U. '34]

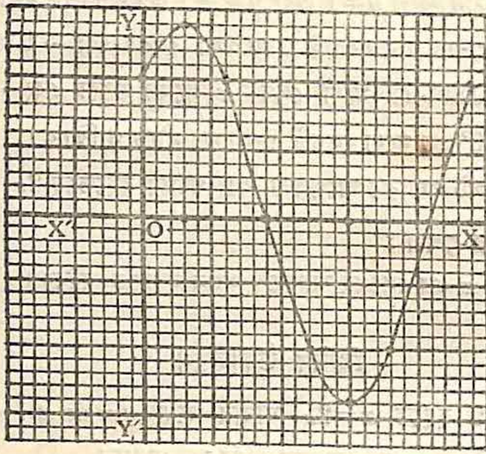
15° ব্যবধানে x-এর বিভিন্ন মান এবং তালিকার সাহায্যে y-এর অনুরূপ মানগুলি নিম্নের মত তালিকাভুক্ত করা হইল।

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
Sin x	0	·26	·5	·7	·87	·97	1	·97	·87	·7	·5	·26	0
Cos x	1	·97	·87	·7	·5	·26	0	−·26	−·5	−·7	−·87	−·97	−1
y	1	1·23	1·37	1·4	1·37	1·23	1	·71	·37	0	−·37	−·71	−1

x	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°
Sin x	−·26	−·5	−·7	−·87	−·97	−1	−·97	−·87	−·7	−·5	−·26	0
Cos x	−·97	−·87	−·7	−·5	−·26	0	·26	·5	·7	·87	·97	1
y	−1·23	−1·37	−1·4	−1·37	−1·23	−1	−·71	−·37	0	·37	·71	1

চিত্র 41

x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 15° এবং y-অক্ষ বরাবর এক বাহুর দৈর্ঘ্যের 10 গুণকে একক ধরিয়া তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলিকে স্থাপন করা হইল এবং ঐ বিন্দুগুলিকে হস্তাঙ্কিত সন্তত বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া লেখটি পাওয়া গেল।



চিত্র 42

লেখ হইতে দেখা যাইতেছে যে, (i) প্রদত্ত সীমার মধ্যে দুইটি বিন্দুতে $y=0$, এবং ঐ দুইটি বিন্দুতে, $x=9\times 15^\circ=135^\circ$ এবং $x=21\times 15^\circ=315^\circ$.

(ii) যে বিন্দুতে y সর্বোচ্চ সেই বিন্দুতে $x=3\times 15^\circ=45^\circ$

(iii) যে বিন্দুতে y সর্বনিম্ন সেই বিন্দুতে $x=15\times 15^\circ=225^\circ$.

উদা. 2. $x=0$ হইতে $x=\pi$-এর মধ্যে $\cot x-\tan x=2$ সমীকরণটির লেখ সাহায্যে সমাধান কর। [C. U. '49]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}=2,$

or, $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=2,$ or, $\cos 2x=\sin 2x,$

or, $\cot 2x=1.$

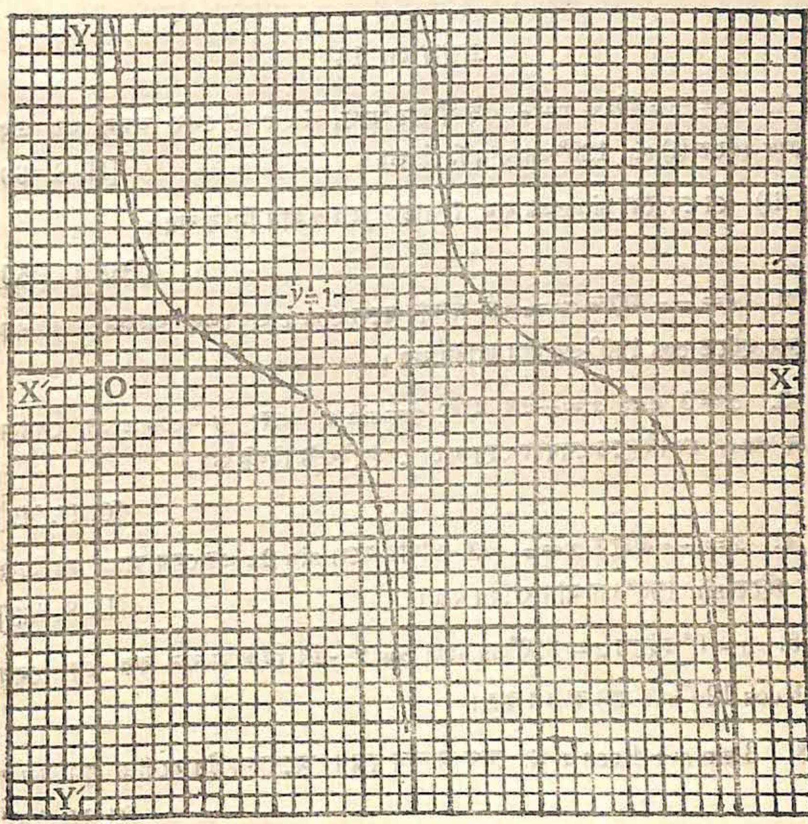
এখন, $y=\cot 2x$, এবং, $y=1$ এর লেখ একই অক্ষদ্বয়ে একই একক লইয়া অঙ্কন করিলে লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুই নির্ণেয় সমাধান হইবে।

$y = \cot 2x$-এর লেখ অঙ্কনের জন্য 15° ব্যবধানে x-এর মান এবং y-এর অনুরূপ মানগুলি লইয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল।

x	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
y or Cot $2x$		5·67	2·75	1·73	1·19	·84	·58	·36	·18	0

x	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	...
y or Cot $2x$	−·18	−·36	−·58	−·84	−1·19	−1·73	−2·75	−5·67	...

চিত্র 43



চিত্র 44

এখন, x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 5° এবং y-অক্ষ বরাবর একবাহুর দৈর্ঘ্যের 3 গুণকে একক ধরিয়া পূর্ব পৃষ্ঠার বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করা হইল এবং ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া $y=\cot 2x$-এর লেখ পাওয়া গেল।

একই অক্ষদ্বয়ে এবং একই এককে $y=1$-এর লেখটিও অঙ্কন করা হইল।

লেখ হইতে দেখা যায় যে, লেখ দুইটির পরস্পর যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে সেই বিন্দু দুইটির ভুজ $22\frac{1}{2}^\circ$ এবং $112\frac{1}{2}^\circ$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{\pi}{8}, \ \frac{5\pi}{8}$.

প্রশ্নমালা 14

1. $x=-\pi$ হইতে $x=\pi$. এই সীমার মধ্যে, $\sin x$-এর লেখ অঙ্কন কর এবং ঐ লেখ হইতে (i) $\sin 120^\circ$-এর মান নির্ণয় কর। [H. S. '60]

(ii) যে কোণের sine-এর মান $\cdot 7$ তাহার আসন্ন মান নির্ণয় কর।

[Pat. U. '50]

2. $x=-\pi$ হইতে $x=\pi$ এই সীমার মধ্যে $\cos x$-এর লেখ অংকন কর এবং ঐ লেখ হইতে $\cos 120^\circ$-এর মান বাহির কর।

3. $x=0$ এবং $x=\pi$-এর মধ্যে $y=\sin x$ এবং $y=\cos x$-এর লেখদ্বয় অঙ্কন কর। যে বিন্দুতে লেখদ্বয় ছেদ করে সেই বিন্দুটি নির্ণয় কর।

[C. U. '46]

4. $x=-\pi$ হইতে $x=\pi$ এই সীমার মধ্যে $\sin 2x$-এর লেখ অঙ্কন কর এবং লেখ হইতে $\sin 150^\circ$-এর মান বাহির কর। [H. S. '63]

5. $x=0^\circ$ হইতে $x=360^\circ$এর মধ্যে $\cos 2x$-এর লেখ অংকন কর এবং লেখ হইতে $\cos 120^\circ$-এর মান বাহির কর।

6. $3 \sin x+4 \cos x$-এর লেখ অংকন কর। অপেক্ষকটির সর্বোচ্চ মান কত?

[C. U. '50]

7. লেখ সাহায্যে সমাধান কর :—

(i) $\tan x=1$, $x=0$ হইতে, $x=\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যে। [C. U. '37]

(ii) $2x-\tan x=0$, $x=0$ হইতে $x=\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যে। [C. U. '45, '54]

(iii) $2\sin^2 x=\cos 2x$, $x=-\frac{\pi}{2}$ হইতে, $x=\frac{3\pi}{2}$-এর মধ্যে।

[C. U. '46, '48]

(iv) $\tan x=\cos x$, $x=0$ হইতে, $x=\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যে। [C. U. '43, '56]

(v) $x=\tan x$, $x=0$, হইতে, $x=\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যে। [C U '45]

(vi) $\sin 2x=\sin x$, $x=0$ হইতে $x=2\pi$-এর মধ্যে। [C. U. '40]

8. একই অক্ষদ্বয় লইয়া, $-\frac{\pi}{2}$ হইতে, $+\frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে $y=x$, $y=\sin x$ এবং $y=\tan x$-এর লেখগুলি অঙ্কন কর। মূল বিন্দুর নিকটে লেখগুলির প্রকৃতি লক্ষ্য করিয়া ঐ বিন্দুতে লেখগুলির মধ্যে কোন সম্পর্ক ধারণা করিতে পার কি? [C. U '52]

Table I

লগারিদ্‌ম্ তালিকা (logarithm table)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5 9 13	17 21 26	30 34 38
						0212	0253	0294	0334	0374	4 8 12	16 20 24	28 32 36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4 8 12	16 20 23	27 31 35
						0607	0645	0682	0719	0755	4 7 11	15 18 22	26 29 33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3 7 11	14 18 21	25 28 32
						0969	1004	1038	1072	1106	3 7 10	14 17 20	24 27 31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3 6 10	13 16 19	23 26 29
						1303	1335	1367	1399	1430	3 7 10	13 16 19	22 25 29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3 6 9	12 15 19	22 25 28
						1614	1644	1673	1703	1732	3 6 9	12 14 17	20 23 26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3 6 9	11 14 17	20 23 26
						1903	1931	1959	1987	2014	3 6 8	11 14 17	19 22 25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3 6 8	11 14 16	19 22 24
						2175	2201	2227	2253	2279	3 5 8	10 13 16	18 21 23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3 5 8	10 13 15	18 20 23
						2430	2455	2480	2504	2529	3 5 8	10 12 15	17 20 22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2 5 7	9 12 14	17 19 21
						2672	2695	2718	2742	2765	2 4 7	9 11 14	16 18 21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2 4 7	9 11 13	16 18 20
						2900	2923	2945	2967	2989	2 4 6	8 11 13	15 17 19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2 4 6	8 10 12	14 15 17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2 3 5	7 9 10	12 14 15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2 3 5	6 8 9	11 13 14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4083	4997	5011	5024	5038	1 3 4	6 7 8	10 11 12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1 3 4	5 6 8	9 10 12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1 3 4	5 6 8	9 10 11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
36	5563	5575	5587	5399	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1 2 3	5 6 7	8 9 10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1 2 3	4 5 6	8 9 10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
44	6435	6444	6454	5464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1 2 3	4 5 6	7 7 8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1 2 3	4 5 5	6 7 8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1 2 3	4 4 5	6 7 8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1 2 2	3 4 5	5 6 7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1 2 2	3 4 5	5 6 7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1 2 2	3 4 5	5 6 7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1 1 2	3 4 4	5 6 7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1 1 2	3 4 4	5 6 7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1 1 2	3 4 4	5 6 6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1 1 2	3 4 4	5 6 6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1 1 2	3 4 4	5 6 6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1 1 2	3 3 4	5 6 6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1 1 2	3 3 4	5 5 6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1 1 2	3 3 4	5 5 6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1 1 2	3 3 4	5 5 6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1 1 2	3 3 4	5 5 6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1 1 2	3 3 4	4 5 6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1 1 2	2 3 4	4 5 6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1 1 2	2 3 4	4 5 6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1 1 2	2 3 4	4 5 5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1 1 2	2 3 4	4 5 5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1 1 2	2 3 4	4 5 5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1 1 2	2 3 4	4 5 5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1 1 2	2 3 3	4 5 5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1 1 2	2 3 3	4 5 5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1 1 2	2 3 3	4 4 5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1 1 2	2 3 3	4 4 5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1 1 2	2 3 3	4 4 5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1 1 2	2 3 3	4 4 5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1 1 2	2 3 3	4 4 5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1 1 2	2 3 3	4 4 5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1 1 2	2 3 3	4 4 5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1 1 2	2 3 3	4 4 5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1 1 2	2 3 3	4 4 5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1 1 2	2 3 3	4 4 5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0 1 1	2 2 3	3 4 4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0 1 1	2 2 3	3 4 4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0 1 1	2 2 3	3 4 4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0 1 1	2 2 3	3 4 4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0 1 1	2 2 3	3 4 4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0 1 1	2 2 3	3 4 4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0 1 1	2 2 3	3 4 4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0 1 1	2 2 3	3 4 4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0 1 1	2 2 3	3 4 4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0 1 1	2 2 3	3 4 4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0 1 1	2 2 3	3 4 4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0 1 1	2 2 3	3 4 4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0 1 1	2 2 3	3 3 4

Table II

এ্যান্টিলগারিদ্‌ম্ তালিকা (Antilogarithm Table)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0 1 1	1 1 2	2 2 3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0 1 1	1 1 2	2 2 3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0 1 1	1 2 2	2 2 3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0 1 1	1 2 2	2 2 3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0 1 1	1 2 2	2 2 3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0 1 1	1 2 2	3 3 3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0 1 1	1 2 2	3 3 3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0 1 1	1 2 2	3 3 3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0 1 1	2 2 2	3 3 3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0 1 1	2 2 3	3 3 4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0 1 1	2 2 3	3 3 4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1 1 2	2 3 3	4 5 5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1 1 2	2 3 4	4 5 5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1 1 2	2 3 4	4 5 5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1 1 2	2 3 4	4 5 6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1 1 2	3 3 4	4 5 6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1 1 2	3 3 4	4 5 6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1 1 2	3 4 4	5 6 6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1 1 2	3 4 4	5 6 6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	2990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

Table III

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01454	0·01745	89°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
1°	·01745	·02036	·02327	·02618	·02908	·03199	·03490	88°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
2°	·03490	·03781	·04071	·04362	·04653	·04943	·05234	87°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
3°	·05234	·05524	·05814	·06105	·06395	·06685	·06976	86°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
4°	·06976	·07266	·07556	·07846	·08136	·08426	·08716	85°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
5°	0·08716	0·09005	0·09295	0·09585	0·09874	0·10164	0·10453	84°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
6°	·10453	·10742	·11031	·11320	·11609	·11898	·12187	83°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
7°	·12187	·12476	·12764	·13053	·13341	·13629	·13917	82°	29	58	87	116	145	173	202	231	260
8°	·13917	·14205	·14493	·14781	·15069	·15356	·15643	81°	29	58	86	115	144	173	202	230	259
9°	·15643	·15931	·16218	·16505	·16792	·17078	·17365	80°	29	57	86	115	144	172	201	230	258
10°	0·17365	0·17651	0·17937	0·18224	0·18509	0·18795	0·19081	79°	29	57	86	115	144	172	201	229	258
11°	·19081	·19366	·19652	·19937	·20222	·20507	·20791	78°	29	57	86	114	143	171	200	228	257
12°	·20791	·21076	·21360	·21644	·21928	·22212	·22495	77°	28	57	85	114	142	170	199	227	256
13°	·22495	·22778	·23062	·23345	·23627	·23910	·24192	76°	28	57	85	113	141	170	198	226	255
14°	·24192	·24474	·24756	·25038	·25320	·25601	·25882	75°	28	56	85	113	141	169	197	226	254
15°	0·25882	0·26163	0·26443	0·26724	0·27004	0·27284	0·27564	74°	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16°	·27564	·27843	·28123	·28402	·28680	·28959	·29237	73°	28	56	84	112	140	167	195	223	251
17°	·29237	·29515	·29793	·30071	·30348	·30625	·30902	72°	28	56	83	111	139	166	194	222	250
18°	·30902	·31178	·31454	·31730	·32006	·32282	·32557	71°	28	55	83	110	138	166	193	221	248
19°	·32557	·32832	·33106	·33381	·33655	·33929	·34202	70°	27	55	82	110	137	164	192	219	247

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	0·34202	0·34475	0·34748	0·35021	0·35293	0·35565	0·35837	69°	27	55	82	109	187	164	191	218	246
21°	·35837	·36108	·36379	·36650	·36921	·37191	·37461	68°	27	54	81	108	136	163	190	217	244
22°	·37461	·37730	·37999	·38268	·38537	·38805	·39073	67°	27	54	81	108	135	161	188	215	242
23°	·39073	·39341	·39608	·39875	·40142	·40408	·40674	66°	27	53	80	107	134	160	187	214	240
24°	·40674	·40939	41204	·41469	·41734	·41998	·42262	65°	27	53	80	106	133	159	186	212	238
25°	0·42262	0·42525	0·42788	0·43051	0·43313	0·43575	0·43837	64°	26	52	79	105	131	157	184	210	236
26°	·43837	·44098	·44359	·44620	·44880	·45140	·45399	63°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
27°	·45399	·45658	·45917	·46175	·46433	·46690	·46947	62°	26	52	77	103	129	155	181	206	232
28°	·46947	·47204	·47460	·47716	·47971	·48226	·48481	61°	26	51	77	102	128	154	179	204	230
29°	·48481	·48735	·48989	·49242	·49495	·49748	·50000	60°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
30°	0·50000	0·50252	0·50503	0·50754	0·51004	0·51254	0·51504	59°	25	50	75	100	125	150	175	200	225
31°	·51504	·51753	·52002	·52250	·52498	·52745	·52992	58°	25	50	74	99	124	149	174	198	223
32°	·52992	·53238	·53484	·53730	·53975	·54220	·54464	57°	25	49	74	98	123	147	172	196	221
33°	·54464	·54708	·54951	·55194	·55436	·55678	·55919	56°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
34°	·55919	·56160	·56401	·56641	·56880	·57119	·57358	55°	24	48	72	96	120	144	168	192	216
35°	0·57358	0·57596	0·57833	0·58070	0·58307	0·58543	0·58779	54°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
36°	·58779	·59014	·59248	·59482	·59716	·59949	·60182	53°	23	47	70	94	117	140	164	187	211
37°	·60182	·60414	·60645	·60876	·61107	·61337	·61566	52°	23	46	70	92	116	139	162	185	208
38°	·61566	·61795	·62024	·62251	·62479	·62706	·62932	51°	23	46	68	91	114	137	159	182	205
39°	·62932	·63158	·63383	·63608	·63832	·64056	·64279	50°	22	45	67	90	112	135	157	179	202
40°	0·64279	0·64501	0·64723	0·64945	0·65166	0·65386	0·65606	49°	22	44	66	88	111	133	155	177	199
41°	·65606	·65825	·66044	·66262	·66480	·66697	·66913	48°	22	44	65	87	109	131	153	174	196
42°	·66913	·67129	·67344	·67559	·67773	·67987	·68200	47°	21	43	64	86	107	129	150	172	193
43°	·68200	·68412	·68624	·68835	·69046	·69256	·69466	46°	21	42	63	84	106	127	148	169	190
44°	·69466	·69675	·69883	·70091	·70298	·70505	·70711	45°	21	42	62	83	104	124	145	166	187

NATURAL COSINES

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	0·70711	0·70916	0·71121	0·71325	0·71529	0·71732	0·71934	44°	20	41	61	82	102	122	143	163	184
46°	·71934	·72136	·72337	·72537	·72737	·72937	·73135	43°	20	40	60	80	100	120	140	160	180
47°	·73135	·73333	·73531	·73728	·73924	·74120	·74314	42°	20	39	59	78	98	118	138	157	177
48°	·74314	·74509	·74703	·74896	·75088	·75280	·75471	41°	19	39	58	77	96	116	135	154	173
49°	·75471	·75661	·75851	·76041	·76229	·76417	·76604	40°	19	38	57	76	95	113	132	151	170
50°	0·76604	0·76791	0·76977	0·77162	0·77347	0·77531	0·77715	39°	19	37	56	74	93	111	130	148	167
51°	·77715	·77897	·78079	·78261	·78442	·78622	·78801	38°	18	36	54	72	91	109	127	145	163
52°	·78801	·78980	·79158	·79335	·79512	·79688	·79864	37°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
53°	·79864	·80038	·80212	·80386	·80558	·80730	·80902	36°	17	35	52	69	87	104	121	138	156
54°	·80902	·81072	·81242	·81412	·81580	·81748	·81915	35°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
55°	0·81915	0·82082	0·82248	0·82413	0·82577	0·82741	0·82904	34°	16	33	49	66	82	99	115	132	148
56°	·82904	·83066	·83228	·83389	·83549	·83708	·83867	33°	16	32	48	64	80	96	112	128	144
57°	·83867	·84025	·84182	·84339	·84495	·84650	·84805	32°	16	31	47	63	78	94	110	125	141
58°	·84805	·84959	·85112	·85264	·85416	·85567	·85717	31°	15	30	46	61	76	91	106	122	137
59°	·85717	·85866	·86015	·86163	·86310	·86457	·86603	30°	15	30	44	59	74	89	103	118	133
60°	0·86603	0·86748	0·86892	0·87036	0·87178	0·87321	0·87462	29°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
61°	·87462	·87603	·87743	·87882	·88020	·88158	·88295	28°	14	28	42	55	69	83	97	111	125
62°	·88295	·88431	·88566	·88701	·88835	·88968	·89101	27°	13	27	40	54	67	81	94	108	121
63°	·89101	·89232	·89363	·89493	·89623	·89752	·89879	26°	13	26	39	52	65	78	91	104	117
64°	·89879	·90007	·90133	·90259	·90383	·90507	·90631	25°	13	25	38	50	63	75	88	100	113

NATURAL COSINES

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	0·90631	0·90753	0·90875	0·90996	0·91116	0·91236	0·91355	24°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
66°	·91355	·91472	·91590	·91706	·91822	·91936	·92050	23°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
67°	·92050	·92164	·92276	·92388	·92499	·92609	·92718	22°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
68°	·92718	·92827	·92935	·93042	·93148	·93253	·93358	21°	11	21	32	43	53	64	75	85	96
69°	·93358	·93462	·93565	·93667	·93769	·93869	·93969	20°	10	20	31	41	51	61	71	81	92
70°	0·93969	0·94068	0·94167	0·94264	0·94361	0·94457	0·94552	19°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
71°	·94552	·94646	·94740	·94832	·94924	·95015	·95106	18°	9	18	28	37	46	55	64	74	83
72°	·95106	·95195	·95284	·95372	·95459	·95545	·95630	17°	9	18	26	35	44	52	61	70	79
73°	·95630	·95715	·95799	·95882	·95964	·96046	·96126	16°	8	17	25	33	41	50	58	66	74
74°	·96126	·96206	·96285	·96363	·96440	·96517	·96593	15°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
75°	0·96593	0·96667	0·96742	0·96815	0·96887	0·96959	0·97030	14°	7	15	22	29	36	44	51	58	65
76°	·97030	·97100	·97169	·97237	·97304	·97371	·97437	13°	7	14	20	27	34	41	47	54	61
77°	·97437	·97502	·97566	·97630	·97692	·97754	·97815	12°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
78°	·97815	·97675	·97934	·97992	·98050	·98107	·98163	11°	6	12	17	23	29	35	41	46	52
79°	·98163	·98218	·98272	·98325	·98378	·98430	·98481	10°	5	11	16	21	27	32	37	42	48
80°	0·98481	0·98531	0·98580	0·98629	0·98676	0·98723	0·98769	9°	5	10	14	19	24	29	34	38	43
81°	·98769	·98814	·98858	·98902	·98944	·98986	·99027	8°	4	9	13	17	22	26	30	34	39
82°	·99027	·99067	·99106	·99144	·99182	·99219	·99255	7°	4	8	11	15	19	23	27	30	34
83°	·99256	·99290	·99324	·99357	·99390	·99421	·99452	6°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
84°	·99452	·99482	·99511	·99540	·99567	·99594	·99619	5°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
85°	0·99619	0·99644	0·99668	0·99692	0·99714	0·99736	0·99756	4°	2	5	7	9	12	14	16	18	21
86°	·99756	·99776	·99795	·99813	·99831	·99847	·99863	3°	2	4	5	7	9	11	13	14	16
87°	·99863	·99878	·99892	·99905	·99917	·99929	·99939	2°	1	3	4	5	7	8	9	10	12
88°	·99939	·99949	·99958	·99966	·99973	·99979	·99985	1°									
89°	·99985	·99989	·99993	·99996	·99998	1·00000	1·00000	0°	এক্ষেত্রে অন্তর এত ক্ষুদ্র যে তাহা উপেক্ষণীয় বলিয়া প্রদত্ত হইল না।								
90°	1·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

Table IV

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01455	0·01746	89°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
1°	·01746	·02037	·02328	·02619	·02910	·03201	·03492	88°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
2°	·03492	·03783	·04075	·04366	·04658	·04949	·05241	87°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
3°	·05241	·05533	·05824	·06116	·06408	·06700	·06993	86°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
4°	·06993	·07285	·07578	·07870	·08163	·08456	·08749	85°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
5°	0·08749	0·09042	0·09335	0·09629	0·09923	0·10216	0·10510	84°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
6°	·10510	·10805	·11099	·11394	·11688	·11983	·12278	83°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
7°	·12278	·12574	·12869	·13165	·13461	·13758	·14054	82°	30	59	89	118	148	178	207	237	266
8°	·14054	·14351	·14648	·14945	·15243	·15540	·15838	81°	30	59	89	119	149	178	208	238	267
9°	·15838	·16137	·16435	·16734	·17033	·17333	·17633	80°	30	60	90	120	150	179	209	239	269
10°	0·17633	0·17933	0·18233	0·18534	0·18835	0·19136	0·19438	79°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
11°	·19438	·19740	·20042	·20345	·20648	·20952	·21256	78°	30	61	91	121	152	182	212	242	273
12°	·21256	·21560	·21864	·22169	·22475	·22781	·23087	77°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
13°	·23087	·23393	·23700	·24008	·24316	·24624	·24933	76°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
14°	·24933	·25242	·25552	·25862	·26172	·26483	·26795	75°	31	62	93	124	155	186	217	248	279
15°	0·26795	0·27107	0·27419	0·27732	0·28046	0·28360	0·28675	74°	31	63	94	125	157	188	219	250	282
16°	·28675	·28990	·29305	·29621	·29938	·30255	·30573	73°	32	63	95	126	158	190	221	253	285
17°	·30573	·30891	·31210	·31530	·31850	·32171	·32492	72°	32	64	96	128	160	192	224	256	288
18°	·32492	·32814	·33136	·33460	·33783	·34108	·34433	71°	32	65	97	129	162	194	226	259	291
19°	·34433	·34758	·35085	·35412	·35740	·36068	·36397	70°	33	65	98	131	164	196	229	262	294

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	0·36397	0·36727	0·37057	0·37388	0·37720	0·38053	0·38386	69°	33	66	100	133	166	199	232	265	298
21°	·38386	·38721	·39055	·39391	·39727	·40065	·40403	68°	34	67	101	134	168	202	236	269	302
22°	·40403	·40741	·41081	·41421	·41763	·42105	·42447	67°	34	68	102	136	170	205	239	273	306
23°	·42447	·42791	·43136	·43481	·43828	·44175	·44523	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·44523	·44872	·45222	·45573	·45924	·46277	·46631	65°	35	70	105	140	176	211	246	281	316
25°	0·46631	0·46985	0·47341	0·47698	0·48055	0·48414	0·48773	64°	36	71	107	143	179	214	250	286	321
26°	·48773	·49134	·49495	·49858	·50222	·50587	·50953	63°	36	73	109	145	182	218	254	291	327
27°	·50953	·51320	·51688	·52057	·52427	·52798	·53171	62°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
28°	·53171	·53545	·53920	·54296	·54673	·55051	·55431	61°	38	75	113	151	189	226	264	302	339
29°	·55431	·55812	·56194	·56577	·56962	·57348	·57735	60°	38	77	115	154	192	230	269	307	346
30°	0·57735	0·58124	0·58513	0·58905	0·59297	0·59691	0·60086	59°	39	78	118	157	196	235	274	313	353
31°	·60086	·60483	·60881	·61280	·61681	·62083	·62487	58°	40	80	120	160	200	240	280	320	360
32°	·62487	·62892	·63299	·63707	·64117	·64528	·64941	57°	41	82	123	164	205	245	286	327	368
33°	·64941	·65355	·65771	·66189	·66608	·67028	·67451	56°	42	84	126	167	209	251	293	334	376
34°	·67451	·67875	·68301	·68728	·69157	·69588	·70021	55°	43	86	128	171	214	257	300	342	385
35°	0·70021	0·70455	0·70891	0·71329	0·71769	0·72211	0·72654	54°	44	88	132	176	220	263	307	351	395
36°	·72654	·73100	·73547	·73996	·74447	·74900	·75355	53°	45	90	135	180	225	270	315	360	405
37°	·75355	·75812	·76272	·76733	·77196	·77661	·78129	52°	46	92	139	185	231	277	324	370	416
38°	·78129	·78598	·79070	·79544	·80020	·80498	·80978	51°	48	95	143	190	238	285	333	380	428
39°	·80978	·81461	·81946	·82434	·82923	·83415	·83910	50°	49	98	147	196	245	293	342	391	440
40°	0·83910	0·84407	0·84906	0·85408	0·85912	0·86419	0·86929	49°	50	101	151	201	252	302	352	402	453
41°	·86929	·87441	·87955	·88473	·88992	·89515	·90040	48°	52	104	156	208	260	311	363	415	467
42°	·90040	·90569	·91099	·91633	·92170	·92709	·93252	47°	54	107	161	214	268	321	375	429	482
43°	·93252	·93797	·94345	·94896	·95451	·96008	·96569	46°	55	111	166	221	277	332	387	442	498
44°	·96569	·97133	·97700	·98270	·98843	·99420	1·00000	45°	57	114	172	229	286	343	400	457	515

NATURAL COTANGENTS

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	1·00000	1·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11713	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22758	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	776
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	382	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·57981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1·7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1·8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1·9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2·0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2·0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	76	95	119	142	166	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	58	87	116	145	174	203	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	122	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1126	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	427	481
77°	4·3315	4·3897	4·4494	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	63	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·8430	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	293	366	439	513	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°									
81°	6·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°									
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·0780	10·3854	10·7119	11·0594	11·4301	5°									
85°	11·4301	11·8262	12·2505	12·7062	13·1969	13·7267	14·3007	4°									
86°	14·3007	14·9244	15·6048	16·3499	17·1693	18·0750	19·0811	3°									
87°	19·0811	20·2056	21·4704	22·9038	24·5418	26·4316	28·6363	2°									
88°	28·6363	31·2416	34·3678	38·1885	42·9641	49·1039	57·2900	1°									
89°	57·2900	68·7501	85·9398	114·589	171·885	343·774	+∞	0°									
90°	+∞																

এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্তনশীল যে তাহা তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে।

অতি ক্ষুদ্র x' কোণের ক্ষেত্রে, cot x' বা tan $(90° - x')$ প্রায় $3437·7 \div x$ এর সমান।

NATURAL COTANGENTS

Table V

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	$-\infty$	7·46373	7·76475	7·94084	8·06578	8·16268	8·24186	89°	এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্তনশীল যে তাহাদিগকে তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে। অতি ক্ষুদ্র x' কোণের log tan x' বা log cot $(90°-x') = \log x + \bar{4}\cdot46373$.								
1°	8·24186	8·30879	8·36678	8·41792	8·46366	8·50504	8·54282	88°									
2°	8·54282	8·57757	8·60973	8·63968	8·66769	8·69400	8·71880	87°									
3°	8·71880	8·74226	8·76451	8·78568	8·80585	8·82513	8·84358	86°									
4°	8·84358	8·86128	8·87829	8·89464	8·91040	8·92561	8·94030	85°									
5°	8·94030	8·95450	8·96825	8·98157	8·99450	9·00704	9·01923	84°									
6°	9·01923	9·03109	9·04262	9·05386	9·06481	9·07548	9·08589	83°									
7°	9·08589	9·09606	9·10599	9·11570	9·12519	9·13447	9·14356	82°	96	192	288	384	480	576	672	768	864
8°	9·14356	9·15245	9·16116	9·16970	9·17807	9·18628	9·19433	81°	85	169	254	338	423	507	592	676	761
9°	9·19433	9·20223	9·20999	9·21761	9·22509	9·23244	9·23967	80°	76	151	227	302	378	453	529	604	680
10°	9·23967	9·24677	9·25376	9·26063	9·26739	9·27405	9·28060	79°	68	136	204	272	341	409	477	545	613
11°	·28060	·28705	·29340	·29966	·30582	·31189	·31788	78°	62	124	186	248	310	373	435	497	559
12°	·31788	·32378	·32960	·33534	·34100	·34658	·35209	77°	57	114	171	228	285	342	399	456	513
13°	·35209	·35752	·36289	·36819	·37341	·37858	·38368	76°	53	105	158	210	263	316	368	421	473
14°	·38368	·38871	·39369	·39860	·40346	·40825	·41300	75°	49	98	147	195	244	293	342	391	440
15°	9·41300	9·41768	9·42232	9·42690	9·43143	9·43591	9·44034	74°	46	91	137	182	228	273	319	364	410
16°	·44034	·44472	·44905	·45334	·45758	·46178	·46594	73°	43	85	128	171	213	256	299	341	384
17°	·46594	·47005	·47411	·47814	·48213	·48607	·48998	72°	40	80	120	160	201	241	281	321	361
18°	·48998	·49385	·49768	·50148	·50523	·50896	·51264	71°	38	76	113	151	189	227	264	302	340
19°	·51264	·51269	·51991	·52350	·52705	·53056	·53405	70°	36	71	107	143	179	214	250	285	321

20°	9·53405	9·53751	9·54093	9·54433	9·54769	9·55102	9·55433	69°	34	68	101	135	169	203	237	270	304
21°	·55433	·55761	·56085	·56408	·56727	·57044	·57358	68°	32	64	96	128	161	193	225	257	289
22°	·57358	·57669	·57978	·58284	·58588	·58889	·59188	67°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
23°	·59188	·59484	·59778	·60070	·60359	·60646	·60931	66°	29	58	87	116	146	174	204	233	262
24°	·60931	·61214	·61494	·61773	·62049	·62323	·62595	65°	28	56	83	111	139	166	195	222	250
25°	9·62595	9·62865	9·63133	9·63398	9·63662	9·63924	9·64184	64°	27	53	80	106	133	159	186	212	239
26°	·64184	·64442	·64698	·64953	·65205	·65456	·65705	63°	25	51	76	102	127	152	178	203	229
27°	·65705	·65952	·66197	·66441	·66682	·66922	·67161	62°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
28°	·67161	·67398	·67633	·67866	·68098	·68328	·68557	61°	23	47	70	93	117	140	163	186	210
29°	·68557	·68784	·69010	·69234	·69456	·69677	·69897	60°	22	45	67	89	112	134	156	179	201
30°	9·69897	9·70115	9·70332	9·70547	9·70761	9·70973	9·71184	59°	22	43	65	86	107	129	150	172	193
31°	·71184	·71393	·71602	·71809	·72014	·72218	·72421	58°	21	41	62	82	103	124	144	165	185
32°	·72421	·72622	·72823	·73022	·73219	·73416	·73611	57°	20	40	59	79	99	119	139	159	178
33°	·73611	·73805	·73997	·74189	·74379	·74568	·74756	56°	19	38	57	76	96	115	134	153	172
34°	·74756	·74943	·75128	·75313	·75496	·75678	·75859	55°	18	37	55	74	92	110	129	147	165
35°	9·75859	9·76039	9·76218	9·76395	9·76572	9·76747	9·76922	54°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
36°	·76922	·77095	·77268	·77439	·77609	·77778	·77946	53°	17	34	51	68	86	103	120	137	154
37°	·77946	·78113	·78280	·78445	·78609	·78772	·78934	52°	17	33	50	66	83	99	116	132	149
38°	·78934	·79095	·79256	·79415	·79573	·79731	·79887	51°	16	32	48	64	80	95	112	127	143
39°	·79887	·80043	·80197	·80351	·80504	·80656	·80807	50°	15	31	46	62	77	92	108	123	138
40°	9·80807	9·80957	9·81106	9·81254	9·81402	9·81549	9·81694	49°	15	30	44	59	74	89	104	118	133
41°	·81694	·81839	·81983	·82126	·82269	·82410	·82551	48°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
42°	·82551	·82691	·82830	·82968	·83106	·83242	·83378	47°	14	28	41	55	69	83	97	110	124
43°	·83378	·83513	·83648	·83781	·83914	·84046	·84177	46°	13	27	40	53	67	80	93	106	120
44°	·84177	·84308	·84437	·84566	·84694	·84822	·84949	45°	13	26	38	51	64	77	90	102	115
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	9·84949	9·85074	9·85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	44°	12	25	37	50	62	74	87	99	112
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86294	·86413	43°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	42°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·87778	41°	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	·87778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	40°	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	39°	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	38°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	37°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	·90611	·90704	·90796	36°	9	19	28	37	47	56	65	74	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91241	·91336	35°	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	34°	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	33°	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	32°	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	31°	8	16	23	31	39	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	30°	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	29°	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	28°	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	·94988	27°	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	26°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	25°	6	12	18	24	30	36	42	48	54

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	9·95723	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	·98284	16°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9·99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	·99520	·99539	·99557	·99575	8°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	·99643	·99659	·99675	7°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	·99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	·99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	·99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																

LOGARITHMIC COSINES

Table VI

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	−∞	7·46373	7·76476	7·94086	8·06581	8·16273	8·24192	89°									
1°	8·24192	8·30888	8·36689	8·41807	8·46385	8·50527	8·54308	88°									
2°	8·54308	8·57788	8·61009	8·64009	8·66816	8·69453	8·71940	87°									
3°	8·71940	8·74292	8·76525	8·78649	8·80674	8·82610	8·84464	86°									
4°	8·84464	8·86243	8·87953	8·89598	8·91185	8·92716	8·94195	85°									
5°	8·94195	8·95627	8·97013	8·98358	8·99662	9·00930	9·02162	84°									
6°	9·02162	9·03361	9·04528	9·05666	9·06775	9·07858	9·08914	83°									
7°	9·08914	9·09947	9·10956	9·11943	9·12909	9·13854	9·14780	82°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
8°	9·14780	9·15688	9·16577	9·17450	9·18306	9·19146	9·19971	81°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
9°	9·19971	9·20782	9·21578	9·22361	9·23130	9·23887	9·24632	80°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
10°	9·24632	9·25365	9·26086	9·26797	9·27496	9·28186	9·28865	79°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
11°	·28865	·29535	·30195	·30846	·31489	·32122	·32747	78°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
12°	·32747	·33365	·33974	·34576	·35170	·35757	·36336	77°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
13°	·36336	·36909	·37476	·38035	·38589	·39136	·39677	76°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
14°	·39677	·40212	·40742	·41266	·41784	·42297	·42805	75°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
15°	9·42805	9·43308	9·43806	9·44299	9·44787	9·45271	9·45750	74°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
16°	·45750	·46224	·46694	·47160	·47622	·48080	·48534	73°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
17°	·48534	·48984	·49430	·49872	·50311	·50746	·51178	72°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
18°	·51178	·51606	·52031	·52452	·52870	·53285	·53697	71°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
19°	·53697	·54106	·54512	·54916	·55315	·55712	·56107	70°	40	80	121	160	201	241	281	321	362

এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্তনশীল যে তাহাদিগকে তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে। অতি ক্ষুদ্র x' কোণের ক্ষেত্রে $\log \sin x'$ বা $\log \cos (90^\circ - x) = \log x + \bar{4}\ 4{\cdot}6373$.

20°	9·56107	9·56498	9·56887	9·57274	9·57658	9·58039	9·58418	69°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
21°	·58418	·58794	·59168	·59540	·59909	·60276	·60641	68°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
22°	·60641	·61004	·61364	·61722	·62079	·62433	·62785	67°	36	72	107	143	179	214	250	286	322
23°	·62785	·63135	·63484	·63830	·64175	·64517	·64858	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·64858	·65197	·65535	·65870	·66204	·66537	·66867	65°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
25°	9·66867	9·67196	9·67524	9·67850	9·68174	9·68497	9·68818	64°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
26°	·68818	·69138	·69457	·69774	·70089	·70404	·70717	63°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
27°	·70717	·71028	·71339	·71648	·71955	·72262	·72567	62°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
28°	·72567	·72872	·73175	·73476	·73777	·74077	·74375	61°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
29°	·74375	·74673	·74969	·75264	·75558	·75852	·76144	60°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
30°	9·76144	9·76435	9·76725	9·77015	9·77303	9·77591	9·77877	59°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
31°	·77877	·78163	·78448	·78732	·79015	·79297	·79579	58°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
32°	·79579	·79860	·80140	·80419	·80697	·80975	·81252	57°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
33°	·81252	·81528	·81803	·82078	·82352	·82626	·82899	56°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
34°	·82899	·83171	·83442	·83713	·83984	·84254	·84523	55°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
35°	9·84523	9·84791	9·85059	9·85327	9·85594	9·85860	9·86126	54°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
36°	·86126	·86392	·86656	·86921	·87185	·87448	·87711	53°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
37°	·87711	·87974	·88236	·88498	·88759	·89020	·89281	52°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
38°	·89281	·89541	·89801	·90061	·90320	·90578	·90837	51°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
39°	·90837	·91095	·91353	·91610	·91868	·92125	·92381	50°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
40°	9·92381	9·92638	9·92894	9·93150	9·93406	9·93661	9·93916	49°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
41°	·93916	·94171	·94426	·94681	·94935	·95190	·95444	48°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
42°	·95444	·95698	·95952	·96205	·96459	·96712	·96966	47°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
43°	·96966	·97219	·97472	·97725	·97978	·98231	·98484	46°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
44°	·98484	·98737	·98989	·99242	·99495	·99747	10·00000	45°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COTANGENTS

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	10·00000	10·00253	10·00505	10·00758	10·01011	10·01263	10·01516	44°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
46°	·01516	·01769	·02022	·02275	·02528	·02781	·03034	43°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
47°	·03034	·03288	·03541	·03795	·04048	·04302	·04556	42°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
48°	·04556	·04810	·05065	·05319	·05574	·05829	·06084	41°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
49°	·06084	·06339	·06594	·06850	·07106	·07362	·07619	40°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
50°	10·07619	10·07875	10·08132	10·08390	10·08647	10·08905	10·09163	39°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
51°	·09163	·09422	·09680	·09939	·10199	·10459	·10719	38°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
52°	·10719	·10980	·11241	·11502	·11764	·12026	·12289	37°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
53°	·12289	·12552	·12815	·13079	·13344	·13608	·13874	36°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
54°	·13874	·14140	·14406	·14673	·14941	·15209	·15477	35°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
55°	10·15477	10·15746	10·16016	10·16287	10·16558	10·16829	10·17101	34°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
56°	·17101	·17374	·17648	·17922	·18197	·18472	·18748	33°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
57°	·18748	·19025	·19303	·19581	·19860	·20140	·20421	32°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
58°	·20421	·20703	·20985	·21268	·21552	·21837	·22123	31°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
59°	·22123	·22409	·22697	·22985	·23275	·23565	·23856	30°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
60°	10·23856	10·24148	10·24442	10·24736	10·25031	10·25327	10·25625	29°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
61°	·25625	·25923	·26223	·26524	·26825	·27128	·27433	28°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
62°	·27433	·27738	·28045	·28352	·28661	·28972	·29283	27°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
63°	·29283	·29596	·29911	·30226	·30543	·30862	·31182	26°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
64°	·31182	·31508	·31826	·32150	·32476	·32804	·33133	25°	33	65	98	130	163	195	228	260	293

									1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	10·33133	10·33463	10·33796	10·34130	10·3[illegible]	10·34803	10·35142	24°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
66°	·35142	·35483	·35825	·36170	·36516	·36865	·37215	23°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
67°	·37215	·37567	·37921	·38278	·38636	·38996	·39359	22°	36	72	107	143	179	214	251	286	322
68°	·39359	·39724	·40091	·40460	·40832	·41206	·41582	21°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
69°	·41582	·41961	·42342	·42726	·43113	·43502	·43893	20°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
70°	10·43893	10·44288	10·44685	10·45085	10·45488	10·45894	10·46303	19°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
71°	·46303	·46715	·47130	·47548	·47969	·48394	·48822	18°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
72°	·48822	·49254	·49689	·50128	·50570	·51016	·51466	17°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
73°	·51466	·51920	·52378	·52840	·53306	·53776	·54250	16°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
74°	·54250	·54729	·55213	·55701	·56194	·56692	·57195	15°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
75°	10·57195	10·57703	10·58216	10·58734	10·59258	10·59788	10·60323	14°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
76°	·60323	·60864	·61411	·61965	·62524	·63091	·63664	13°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
77°	·63664	·64243	·64830	·65424	·66026	·66635	·67253	12°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
78°	·67253	·67878	·68511	·69154	·69805	·70465	·71135	11°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
79°	·71135	·71814	·72504	·73203	·73914	·74635	·75368	10°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
80°	10·75368	10·76113	10·76870	10·77639	10·78422	10·79218	10·80029	9°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
81°	·80029	·80854	·81694	·82550	·83423	·84312	·85220	8°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
82°	·85220	·86146	·87091	·88057	·89044	·90053	·91086	7°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
83°	·91086	·92142	·93225	·94334	·95472	·96639	·97838	6°									
84°	·97838	·99070	11·00338	11·01642	11·02987	11·04373	11·05805	5°									
85°	11·05805	11·07284	11·08815	11·10402	11·12047	11·13757	11·15536	4°									
86°	11·15536	11·17390	11·19326	11·21351	11·23475	11·25708	11·28060	3°									
87°	11·28060	11·30547	11·33184	11·35991	11·38991	11·42212	11·45692	2°									
88°	11·45692	11·49473	11·53615	11·58193	11·63311	11·69112	11·75808	1°	এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্তনশীল যে তাহাদিগকে তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে।								
89°	11·75808	11·83727	11·93419	12·05914	12·23524	12·53627	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COTANGENTS

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1

1. (i) $22\frac{1}{2}°$, (ii) $120°$, (iii) $15°$, (iv) $252°$.

2. (i) $\frac{\pi}{4}$, (ii) $\frac{\pi}{6}$, (iii) $\frac{3\pi}{4}$, (iv) $\frac{5\pi}{4}$, (v) $\frac{11\pi}{6}$, (vi) 0 ;

4. $\frac{\pi}{2}$; 5. $75°, 15°, 90°$; 6. $\frac{\pi}{3}$; 7. $\frac{(n-2)\pi}{n}$;

8. $54°, 81°, 108°, 135°, 162°$ এবং $\frac{3\pi}{10}, \frac{9\pi}{20}, \frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{10}$;

9. $30°, 60°, 90°$; 10. $132° 16' \cdot 36$; 11. 2500 ফুট ;

12. $55\frac{1}{2}$ ফুট ; 13 $34° 21' \cdot 8$; 14. প্রথম বৃত্তের : দ্বিতীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= 5 : 4$; 15. 360 গজ ; 16. 330 ফুট ; 17. $\frac{\pi}{8}$;

প্রশ্নমালা 2A

28. (i) $\frac{4}{5}, \frac{4}{3}$, (ii) $-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}$ (iii) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}$

(iv) $-\frac{15}{17}, -\frac{17}{8}$ 30. (i) $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\theta = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(ii) $\sin\theta = \frac{-\sqrt{q^2-p^2}}{q}$, $\tan\theta = \frac{-\sqrt{q^2-p^2}}{p}$

(iii) $\cos\theta = \frac{-\sqrt{n^2-m^2}}{n}$, $\tan\theta = \frac{-m}{\sqrt{n^2-m^2}}$

(iv) $\cos\theta = \frac{2mn}{m^2+n^2}$, $\cot\theta = \frac{2mn}{m^2-n^2}$

31. (i) $(\cos\theta - \sin\theta)^2$, (ii) $(\sec^2 A + \tan^2 A)^2$

32. (i) 2 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 0.

প্রশ্নমালা 2B

1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$ 2. $xy = c^2.$ 4. $x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$

5. $3x^2 + 8y^2 - 14xy + 25 = 0.$

6. $(ca' - c'a)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c).$

প্রশ্নমালা 2C

1. $\frac{1}{2}$. 2. 3. 3. 9. 4. $2\frac{1}{12}$. 5. 1. 6. $1\frac{1}{2}$.
13. 76. 14. $x=2, y=4$. 15. $90°, 60°$.
16. $45°$. 17. $30°$. 18. $45°$. 19. $60°$. 20. $60°$.
21. $30°$. 22. $60°$. 23. $30°$.

প্রশ্নমালা 3

1. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, (iii) -1, (iv) -1, (v) 0, (vi) 1 ;
2. (i) $120°$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $60°, 2$; 3. (i) $-\cos 40°$, (ii) $\tan 42°$,
(iii) $-\operatorname{cosec} 20°$, (iv) $\sin\frac{\pi}{9}$ 4. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, (ii) $-\sqrt{2}$,
(iii) $-\sqrt{3}$, (iv) $-\frac{1}{2}$, (v) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, (vi) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$;
5. (i) $-\frac{1}{2}$, (ii) $4\frac{1}{2}$, (iii) 1 ; 6. $\cot\theta$.
9. $-\frac{4}{5}$; 10. (i) $30°, 150°$; (ii) $150°, 330°$; (iii) $135°, 225°$;
11. (i) $120°, 240°$; (ii) $30°, 150°$; (iii) $30°, 120°, 150°, 240°$;
(iv) $30°, 150°$;

প্রশ্নমালা 4

1. (i) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, (ii) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, (iii) $-(2+\sqrt{3})$; 2. $\frac{1}{2}$;
3. (i) $\frac{56}{65}$, (ii) $-\frac{33}{56}$;
4. $\sin A \cos B \cos C+\sin B \cos C \cos A-\sin C \cos A \cos B+\sin A \sin B \sin C$.

প্রশ্নমালা 5

1. (i) $\sin 8\theta+\sin 2\theta$; (ii) $\cos 4\theta-\cos 10\theta$;
(iii) $\frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)$; (iv) $\frac{1}{2}(\cos 40°+\cos 10°)$;
2. (i) $2\sin 3\theta\cos 2\theta$; (ii) $2\sin 5\theta\sin 2\theta$;
(iii) $2\sin(45°+\theta)\cos(45°-2\theta)$ (iv) $\sqrt{2}\cos 10°$;

18. $4 \sin A \sin B \sin C$; 19. $\cos(A+B+C)+\cos(A-B-C)+\cos(A+B-C)+\cos(A-B+C)$;

প্রশ্নমালা 6

21 (i) $8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$; (ii) $\dfrac{4\tan A(1-\tan^2 A)}{1-6\tan^2 A+\tan^4 A}$;

(iii) $\dfrac{4\tan A(1-\tan^2 A)}{(1+\tan^2 A)^2}$; (iv) $\dfrac{5\tan A-10\tan^3 A+\tan^5 A}{1-10\tan^2 A+5\tan^4 A}$;

23. $-\dfrac{1}{16}$; 28. a.

প্রশ্নমালা 7

10. $\sin 22\frac{1}{2}^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos 22\frac{1}{2}^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

12. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; 13. 2 ; 14. $\dfrac{1}{16}$;

21. $2\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$.

প্রশ্নমালা 9

1. $2n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$; 2. $n\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$; 3. $2n\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$, $2n\pi\pm\dfrac{5\pi}{6}$;

4. $n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$; 5. $2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$, $2n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$,

6. $2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$; 7. $(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$; 8. $n\pi+\dfrac{\pi}{4}$,

9. $(4n+1)\dfrac{\pi}{10}$, $(4n-1)\dfrac{\pi}{2}$; 10. $(2n+1)\dfrac{\pi}{8}$; 11. $(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$; 12. $n\pi, 2n\pi\pm\alpha$ [যেখানে $\cos\alpha=\frac{1}{4}$]

13. $\dfrac{r\pi}{m+(-1)^r n}$; 14. $\dfrac{n\pi}{3}$, $n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$;

15. $\dfrac{n\pi}{3}$, $\dfrac{n\pi}{2}\pm\dfrac{\pi}{12}$; 16. $(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $(2n+1)\pi$, $\dfrac{2n\pi}{5}$;

17. $(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$, $2n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$; 18. $n\pi$, $\dfrac{n\pi}{4}+(-1)^n\dfrac{\pi}{24}$;

19. $\dfrac{2n\pi}{3}$, $(4n+1)\dfrac{\pi}{4}$, $(4n-1)\dfrac{\pi}{2}$;

20. $\dfrac{n\pi}{12}$, $\dfrac{n\pi}{4}$; 21. $n\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$; 22. $(4n+1)\dfrac{\pi}{12}$;

23. $\frac{n\pi}{6}$; 24. $2n\pi+\frac{7\pi}{12}$, $2n\pi-\frac{\pi}{12}$;

25. $2n\pi+\frac{5\pi}{12}$, $2n\pi-\frac{\pi}{12}$; 26. $2n\pi+\frac{7\pi}{12}$, $2n\pi+\frac{\pi}{12}$;

27. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $2n\pi-\frac{\pi}{6}$; 28. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $2n\pi-\frac{\pi}{2}+2\alpha$

[যেখানে α এমন একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ যেন $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$]

29. $n\pi, n\pi+\frac{\pi}{4}$; 30, (i) $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$;

(ii) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$; (iii) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$,
$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; 31. (i) $\frac{5\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$; (ii) $\frac{\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}$;

32. (i) 30°, 150°, 210°, 330° ; (ii) 45°, 60°, 225°, 240° ;
(iii) 45°, 135° ;

33. (i), $2n\pi, (4n+1)\frac{\pi}{6}$; (ii) $2n\pi-\alpha, (4n-1)\frac{\pi}{2}+\alpha$;

(iii) $\frac{n\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{40}$;

(iv) $n\pi+\frac{\alpha}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{6}$; 35. $x=y=\frac{\pi}{4}$;

প্রশ্নমালা 10

1. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{6}$ (iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) $\frac{\pi}{3}$ (v) $-\frac{\pi}{6}$ (vi) $\frac{5\pi}{6}$
(vii) $-\frac{\pi}{4}$;

2. (i) $\cot^{-1}\frac{1}{x}=\sin^{-1}\frac{\pm x}{\sqrt{1+x^2}}=\cos^{-1}\frac{\pm 1}{\sqrt{1+x^2}}$
$=\sec^{-1}\pm\sqrt{1+x^2}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\pm x}$;

3. 1 ; 23. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 24. 3 ; 25. $\frac{1}{6}$; 26. 13 ; 27. 0, $\frac{1}{2}$;

28. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; 29. 0, $\pm\frac{1}{2}$; 30. $\frac{a+b}{1-ab}$; 31. 3, $-\frac{2}{3}$;

32. $\frac{-461}{9}$; 33. 2 ;

প্রশ্নমালা 12

1. (i) 1·10865636 (ii) ·00128426 ; 2. ·71447 ; 3. ·02705 ; 4. ·46206 ; 5. ·77058 ; 6. 9·90321 ; 7. 10·33331 ; 8. 9·98542 ; 9. 10·54390 ; 10. 10·24798 ; 11. ·53822 ; 12. 9·78673152 ; 13. 79°51′47·2″ ; 14. 9·8043393, 10·1956607.

প্রশ্নমালা 13A

1. $(\sqrt{3}-1) : 2 : \sqrt{6}$;

প্রশ্নমালা 13B

1. 90° ; 2. 120° ; 3. A=30°, B=45°, C=105° ; 4. 55°46′16″ ; 5. 104°28′39″ ; 6. 48°11′22·86″, 58°24′42·7″, 73°23′54·44″ ; 7. 25°19′4·4″ ; 8. 58°59′33″ ; 9. 71°42′, 10 132°34′32″ ;

প্রশ্নমালা 13C

1. B=120°, C=30°, $a=1$; 2. 70°53′36″, 49°6′24″ ; 3. 38°12′47·6″, 21°47′12·4″ ; 4. 71°44′29·5″, 48°15′30·5″ ; 5. B=76°47′2″, C=49°12′58″ ; 6. A=117°38′45″, B=27°38′45″ ; 7. A=116°33′54″, B=26°33′54″ ; 8. 69°10′11″, 46°37′49″ ; 9. $8\sqrt{7}$ ফুট, 79°6′24″, 60°, 40°53′36″ ;

প্রশ্নমালা 13D

1. 172·6436 ফুট ; 2. 89·646162 ফুট ; 3. 7·698622 ; 4. 27·0375 ;

প্রশ্নমালা 13E

1. B=45°, 135° ; C=105°, 15° ; $c=50\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$, $50\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$; 2. 44°26′ (প্রায়) বা 135°34′ ; 3. B=34°27′ (প্রায়), C=100°33′ ; 4. 5°44′21″ ; 5. 39°35′10″·8, 28°20′49″·2 ; 6. 4·56706 ফুট।

প্রশ্নমালা 14

3. $\frac{\pi}{4}$; 6. 5 ; 7. (i) $\frac{\pi}{4}$; (ii) 0, $1·17^c$; (iii) $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$; (iv) 38°10′ (প্রায়) ; (v) 17°20′ (প্রায়) ; (vi) $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$;